UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO DE PUNO

Título del proyecto

Comprensión y generalización de los grupos diédricos en los estudiantes de educación matemática

2. **Área de Investigación**

Área de investigación	Línea de Investigación
Didáctica de la matemática	**Pensamiento algebraico**

3**. Duración del proyecto** (Doce meses)

01 de enero del 2021 al 31 de diciembre del 2021

4. **Datos de los integrantes del proyecto**

Apellidos y Nombres	**Quispe Yapo, Wenceslao**
Escuela Profesional	**Educación Secundaria**
Celular	**924 509539**
Correo Electrónico	**collasuyow@gmail.com**

I. Resumen del Proyecto

El objetivo de este proyecto es caracterizar el proceso de comprensión vía la generalización de las propiedades y teoremas de los grupos diédricos en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre, se tiene la finalidad de contribuir conocimientos y recursos didácticos para la enseñaza y aprendizaje de de los grupos de permutación. El marco teórico del estudo tiene dos arístas, primero la teoría de la comprensión Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002 y segundo, los aportes de Vygotsky sobre los procesos de generalización, las contribucicones de Krutetskii (1976) quien descubrió que los escolares aprenden conceptos matemáticos a través de la generalización, y los aportes de Davydov (1990), Rubinshtein (1994) quienes consideran que las acciones mentales como el análisis y la síntesis en y la abstracción deben llevarse a cabo para realizar una actividad de generalización, por otro lado Dubinsky (1991) discute el proceso de abstracción reflexiva en el pensamiento matemático avanzado. La metodología de investiagación tiene su base en The Design Research Methods in Education (Kelly, Lessh & Baek, 2008), Paul Cobb y Koeno Gravemeijer (2008). Esta metodología tiene cuatro fases:

Estudio Preliminar, preparación para el experimento, experimentación para apoyar el aprendizaje y finalmente, análisis retrospectivo.

II. Palabras claves

Generalización, grupos diédricos, didáctica del álgebra.

III. Justificación del proyecto

La investigación es pertinente porque se ha identificado dificultades de aprendizaje comprensivo de las definiciones, propiedades y teoremas de los grupos diédricos en los estudiantes del IV semestre de la especialidad de matemática de la Facultad de Educación. La comprensión de las nociones de grupos de permutación y sus propiedades es esencialmente repetitiva con un matiz aplicativo de las propiedades en la solución de ejercicios y resolución de problemas. Con el estudio se pretende aportar orientaciones didácticas para una adecuada enseñanza de los grupos diédricos, de tal forma que comprenda las nociones algebraicas y se pueda transferir a la solución de problemas y demostración de teoremas. La finalidad del estudio es generar orientaciones didácticas que permitan utilizar la generalización para desarrollar la comprensión de los grupos diédricos, así mismo, proponer actividades didácticas que permitan al docente orientar su desempeño en la conducción de las sesiones de aprendizaje; consecuentemente desarrollar materiales didácticos que ayuden a aprender el álgebra moderna. Finalmente, por una cuestión de dispensa es necesidad mencionar que este proyecto es una continuación del proyecto del año 2020 "Procesos de generalización de sucesiones y series en los estudiantes de educación matemática" y por tanto parte del sustento teórico sobre la generalización y la metodología son las mismas.

Problema general

La cuestión general de la investigación es:

¿Qué características tiene el proceso de comprensión vía la generalización de las propiedades y teoremas de los grupos diédricos en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre?

Problemas específicos

Las cuestiones específicas son:

a) ¿Qué estrategias heurísticas utilizan los estudiantes de educación matemática para deducir o inferir las propiedades y teoremas de los grupos diédricos cuando realizan actividades de construcción de los grupos de simetrías de los polígonos regulares?

b) ¿Qué nivel de comprensión de los grupos diédricos se pueden desarrollar con la realización de actividades de construcción de los grupos de simetrías de los polígonos regulares para generalizar propiedades y teoremas en los estudiantes de educación matemática?

IV. Base Teórica y Antecedentes de Investigación

Base teórica

El marco teórico de este estudio tiene dos aristas, la primera está relacionada con la teoría de la comprensión y segundo, con la generalización desde una visión sociocultural, está última es la misma base teórica que el estudio realizado el año 2020.

Comprensión matemática

Considerando que la comprensión matemática es un fenómeno multidimensional y altamente complejo, es que, se esboza preliminarmente cinco dimensiones siguientes:

Primera, orígenes y fuentes; el origen hace referencia a las situaciones y circunstancias responsables de la aparición de la comprensión y las fuentes a los acontecimientos concretos previos generadores de tales situaciones. Verbigracia, en términos constructivistas generales, el origen de la comprensión se sitúa en aquellas situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se ve implicado el sujeto en su interacción con el medio. Las fuentes, por su parte, se encuentran en las experiencias generadoras de tales situaciones que obligan al individuo a elaborar respuestas adaptadas a cada situación particular (English y Halford, 1995). En este caso, la comprensión surge en este espacio de experiencias, desequilibrios cognitivos, respuestas adaptativas y búsqueda de estabilidad asociada. Como es el caso del presente estudio, se conjetura que una fuente de la comprensión de las propiedades de los grupos diédricos se encuentra en la generalización e identificación de patrones de regularidad en la construcción de los grupos diédricos.

Las naturaleza y funcionamiento, como segunda dimensión, estrechamente relacionadas, suponen enfrentarse a las complejas cuestiones sobre qué es y cómo se produce la comprensión. Por tratarse de un constructo que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observado directamente, estas dimensiones suelen estudiarse al amparo de propuestas teóricas interpretativas de la relación no casual reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo observable. Una de estas propuestas, ampliamente extendida, la encontramos en el enfoque representacional que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002). El empleo de tipologías generales de comprensión (Hiebert y Lefevre, 1986) o de referencias metafóricas (Davis, 1992) son otras de las estrategias usuales presentes en el estudio de tales dimensiones.

La tercera dimensión son los factores, que se refieren a todos aquellos aspectos condicionantes de la comprensión. La especificidad del objeto de comprensión, las capacidades cognitivas generales del sujeto, la valoración personal que éste realiza sobre el propio objeto o las características del medio donde se produce la interacción entre ambos son algunos de los factores reconocidos por los que se ve afectada la comprensión (Sierpinska, 1994; Godino, 2000).

Cuarto, la dimensión evolutiva, la evolución se relaciona con la faceta dinámica de la comprensión y supone reconocer que el conocimiento no se adquiere de forma inmediata e instantánea sino que se va desarrollando en el individuo a lo largo del tiempo. La comprensión, por tanto, no es un fenómeno estático, sino que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter y Lehrer, 1999). En este contexto, la teoría dinámica de Pirie-Kieren para el crecimiento de la comprensión matemática (Pirie y Kieren, 1989, 1994; Kieren, Pirie y Calvert, 1999) aparece entre las propuestas más consolidadas y con mayor influencia en el estudio de esta dimensión en educación matemática. También, los modelos jerárquicos de categorías o niveles aplicados con el propósito de capturar los procesos dinámicos de la comprensión constituyen otra de las estrategias extendidas en la investigación en torno a la evolución. Un claro ejemplo de esta última opción se tiene en el modelo de proceso de dos ejes desarrollado por Koyama (1993, 2000).

Por último, la quinta dimensión son los efectos que se asocian a los resultados o productos derivados de la presencia de una determinada comprensión en el individuo. Suelen considerarse efectos observables los comportamientos adaptados, la aplicación de conocimientos, la resolución de problemas o la descripción de acciones. Entre los efectos internos no observables cabe mencionar como ejemplo las nuevas estructuras cognitivas y semánticas resultantes de un cambio en la comprensión. Esta dimensión aparece reflejada en aproximaciones como la de Duffin y Simpon (1997, 2000) donde se describen algunos de los efectos internos y externos (por ejemplo, sentirse capaz de reconstruir lo olvidado o derivar consecuencias, respectivamente) asociados a las tres componentes de su definición de comprensión.

Relación con otras nociones cognitivas

La relación de la comprensión con otras funciones cognitivas se puede encontrar en los estudios de Byers y Erlwanger (1985), donde se vincula con el aprendizaje y la memoria, Godino y Batanero (1994) en relación con el significado de los objetos matemáticos o Bender (1996) cuando asume que imagen y comprensión son modos de pensamiento distintos aunque estrechamente relacionados. Un aporte reciente en este mismo sentido proviene de Warner et al. (2003) al estudiar la contribución del pensamiento matemático flexible en el crecimiento de la comprensión.

En nuestro estudio de escudriñará las relaciones que pueden existir entre la comprensión y la generalización, se conjetura que la comprensión de las propiedades y teoremas de los grupos diédricos se logrará a través de la ejecución de actividades de construcción de los grupos de simetría de los polígonos regulares identificando regularidades y patrones de formación para generalizar las propiedades y teoremas.

Valoración de la comprensión y generalización

La valoración de la comprensión debe considerar las siguientes condiciones o presupuestos: Primera, su elevada complejidad y existencia de limitaciones inherentes a su propia naturaleza multidimensional, segunda, la influencia de la especificidad del conocimiento matemático en la valoración, como será en nuestro caso los grupos diédricos, tercera, la adecuación de las manifestaciones observables como vía para obtener información sobre la comprensión de los alumnos.

Entre los antecedentes relativo a la valoración de la comprensión se han identificado las más relevantes: como la valoración considerando la representación y las conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992), teniendo en cuenta la superación de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1990, 1994) o según sean las relaciones con significados institucionales preestablecidos (Godino y Batanero, 1994). Igualmente, destacan los métodos y técnicas centrados en la elaboración de perfiles de comprensión (Pirie y Kieren, 1994) así como las estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático, como son los análisis semántico y estructural propuestos por Niemi (1996), el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos derivado del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002a, 2002b) o, más recientemente, el análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático desarrollado y aplicado en Gallardo y González (2006).

Teoría de la generalización

Vygotsky consideró que todos los conceptos aprendidos por los humanos se internalizan a través de un proceso de generalización. Clasificó los conceptos internalizados en:

a) Conceptos espontáneos / cotidianos, estos son creados por la experiencia personal del niño y pueden formarse sin instrucción sistemática.

b) Conceptos científicos son lo que el niño no puede observar o experimentar directamente estos deben enseñarse al niño creando condiciones en las que el niño estudie la formación de un "concepto experimental ideado artificialmente" (Vygotsky, 1986, p. 161).

Estos dos tipos de conceptos forman un proceso unitario; están continuamente relacionados y contribuyen recíprocamente al desarrollo del otro. El desarrollo general de un niño y el aprendizaje son dos procesos simultáneos que dependen cualitativamente el uno del otro (Vygotsky, 1986). La dualidad cualitativa entre desarrollo y aprendizaje se basa esencialmente en los tipos de experiencias que tiene el niño. La experiencia cotidiana de un niño proporciona conocimiento de un contacto físico directo con el entorno cuando el niño usa sus sentidos para analizar, comparar, clasificar y sintetizar. A través de una instrucción sistemática, el niño experimenta situaciones "diseñadas artificialmente" en las que, en colaboración con otro compañero o un adulto con mayor conocimiento, analiza, compara, clasifica y sintetiza a un alto nivel psicológico y el niño viaja por su zona de desarrollo próximo (ZDP) (Vygotsky, 1978).

Aún en contraposición a las ideas de Vygotsky, Piaget también identificó, de manera similar a Vygotsky, dos experiencias diferentes que un niño debería experimentar durante un proceso de aprendizaje:

a) Experiencias físicas, estas consisten en tener contacto directo con los objetos. Durante esta experiencia, el conocimiento se extrae de las propiedades físicas del objeto haciendo abstracción de ellos.

b) Experiencias lógico-matemáticas, en las que el conocimiento se extrae a través de acciones efectuadas en los objetos. Los objetos están físicamente presentes, pero también existe el conjunto de acciones que modifican los objetos, lo que transforma el proceso en una experiencia de aprendizaje.

Las perspectivas de Vygotsky y Piaget sobre el aprendizaje son complementarias entre sí de la siguiente manera: todos los días los conceptos se aprenden predominantemente a través de experiencias físicas, donde los conceptos científicos se aprenden predominantemente a través de experiencias lógico-matemáticas. La teoría del pensamiento de Rubinshtein y el trabajo de Krutetskii sobre las habilidades de los escolares también apoyan esta teoría combinada del aprendizaje. Rubinshtein dividió los pensamientos humanos en dos:

a) Pensamientos empíricos/visuales es el resultado de comparar e identificar las características externas que son similares o idénticas en las cosas.

b) Pensamientos teóricos/abstractos es el resultado del análisis y la abstracción que surgen mientras los datos recibidos por los sentidos se transforman para determinar la esencia de las cosas.

Por otro lado, Krutetskii (1976) descubrió dos formas en que los escolares aprenden conceptos matemáticos a través de la generalización, son los siguientes:

a) El primer método, denominado generalización empírica, consiste en una generalización gradual mediante el análisis de una serie de ejemplos concretos en los que los atributos no esenciales se modifican sistemáticamente. Los niños, que no tienen o casi no tienen éxito en el aprendizaje de las matemáticas, utilizan este método para comprender el conocimiento matemático general.

b) El segundo método, denominado generalización teórica, en tanto que los niños más exitosos en el aprendizaje de las son capaces de generalizar una solución solo a partir de un solo ejemplo al identificar las conexiones / relaciones internas involucradas en la tarea. Estos niños están generalizando soluciones y métodos para abordar un problema en lugar de generalizar aspectos particulares o externos de un problema.

Una definición para la generalización en matemáticas

El concepto de generalización se entiende más comúnmente como una dualidad entre ir de lo particular a lo general y ver lo particular a través de lo general. Con el fin de proporcionar una comprensión del pensamiento involucrado en un proceso de generalización matemática, se entiende la generalización como un proceso de generalización desde la perspectiva de las teorías desarrolladas por los psicólogos educativos Leontief (1903-1979), Krutetskii (1917- 1991), y Rubinshtein (1889-1960), y del educador de matemáticas contemporáneo Dubinsky.

La actividad humana en la interpretación de Leontief

Leontief (1978) definió la actividad humana como "un proceso en el cual se realizan transferencias mutuas entre dos polos" sujeto-objeto "(p. 50). Además, Leontief enfatizó que una actividad debe entenderse como "un sistema que tiene estructura, sus propias transiciones y transformaciones internas, su propio desarrollo" (p. 50). Una actividad no es una reacción o un conjunto de reacciones a diferentes condiciones. Para que una actividad ocurra, tiene que ser una necesidad de algo. Cuando la necesidad se "revela", se convierte en un motivo para la actividad (p. 116). En otras palabras, cuando se toma la decisión de satisfacer una necesidad, la necesidad se convierte en un motivo para una actividad. Desde esta perspectiva, una actividad y su motivo están "necesariamente" conectados (pág. 62).

Además, una necesidad es el motivo que desencadena una actividad. El objetivo de la actividad es satisfacer la necesidad. La mayoría de las veces, el objetivo de una actividad no se puede lograr a través de un solo proceso. Por lo tanto, se debe dividir en una serie de submetas y se debe construir una secuencia de procesos orientados a la meta. Cada uno de estos procesos es una acción subordinada a un propósito particular. A su vez, cada acción se realiza a través de un conjunto de reglas y leyes (operaciones con nombre) que se habían establecido históricamente. Estas operaciones se aplican a las condiciones particulares impuestas por el propósito de la acción. En conclusión, la transferencia entre los dos polos, sujeto y objeto, genera la interacción entre el sujeto, representado por el subsistema: necesidad, motivo, objetivo, propósito, condiciones, y el objeto, representado por el subsistema: actividad, acciones, operaciones.

Dada la importancia de la teoría de la actividad de Leontief, es importante mencionar que esta teoría se desarrolla y expande sus interpretaciones e implicaciones en tres direcciones. Engestrom (2001) habla de tres generaciones de investigación que contribuyen a la evolución de la teoría de la actividad. La primera generación se centra en el trabajo de Vygotsky sobre la tríada del desarrollo humano Sujeto-Objeto-Mediación. La segunda generación se establece mediante la diferenciación de Leontief entre la acción individual y la actividad colectiva. Y, la tercera generación introduce la interconectividad e interacción de al menos dos sistemas de actividad. Toda la investigación contemporánea sobre la teoría de la actividad (Jooganah y Williams, (2016); Gedera y Williams (2016); Solomon, Croft, Duah y Lawson, 2014) es parte de la tercera generación.

Generalización matemática como sistema de actividad

En matemáticas, la necesidad de resolver una situación matemática se convierte en el motivo para identificar una actividad que tiene como objetivo descubrir una solución aceptada por la comunidad matemática. Esta actividad es, de hecho, una actividad mental o un proceso mental. Como actividad mental, se genera y determina mediante acciones mentales como el análisis, la síntesis y la abstracción identificados por Rubinshtein (1994) como componentes críticos en un proceso de pensamiento. Cada una de estas acciones tiene el propósito de contribuir al proceso de resolución de la situación matemática. Todas estas acciones, para ser realizadas, requieren una serie de operaciones que necesitan ser manipuladas en las condiciones específicas impuestas por el problema que debe ser resuelto.

Los objetivos de la actividad de generalización

Se resalta una vez más que la generalización se considera un proceso y no un resultado (Rubinshtein, 1994, Krutetskii, 1976). Rubinshtein (1994) propuso estudiar el pensamiento como un proceso (un proceso de generalización) que deriva de actividades mentales como el análisis y la síntesis en lugar de estudiar la asimilación del conocimiento, que es el resultado de un proceso de pensamiento. Krutetskii (1976) siguió el enfoque de Rubinstein e investigó qué habilidades se necesitan para aprender matemáticas. El significado de las habilidades que Krutetskii usó en su investigación es el de "rasgos individuales de la actividad mental de los que depende la relativa rapidez del dominio de las habilidades y hábitos y sus distinciones cualitativas" (p. 14). Además, Krutetskii notó que: "la aptitud para aprender matemáticas se manifiesta por la habilidad de un alumno para generalizar material matemático" (p. 24). La generalización es un proceso mental que apoya el aprendizaje matemático. Krutetskii (1976) diferenciaba entre dos niveles de la capacidad de generalizar materiales matemáticos:

Primer nivel: la capacidad de un niño para identificar algo general que ya conoce en casos particulares y aplicar lo general a lo particular, por ejemplo, para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma para encontrar el producto. Su objetivo es aplicar un concepto general a una situación particular.

Segundo nivel: la capacidad de un niño para encontrar algo general que no conoce de casos aislados y particulares, por ejemplo, para encontrar el término 100 o n para la secuencia de números que tienen un patrón de regularidad. Su objetivo es descubrir un concepto general a partir de casos particulares.

Las acciones de análisis, síntesis y abstracción.

Rubinshtein (1994) consideró que las acciones mentales como el análisis y la síntesis en y la abstracción deben llevarse a cabo para realizar una actividad de generalización. Davydov (1990) describe estas acciones de la siguiente manera:

- El análisis es el método o técnica lógica mediante el cual los objetos se representan mediante atributos comunes observados (pág. 44). Esta acción tiene el propósito de identificar las características que algunos objetos tienen en común. Se realiza a través de operaciones que conducen a conocer cada objeto. Las operaciones utilizadas delinean cómo un objeto es similar o idéntico a otros objetos. Estas propiedades comunes se denominan atributos del objeto (Davydov, 1990, p. 38).

- Síntesis es el método o técnica lógica que utiliza los atributos observados a través del análisis para crear un nuevo sistema (pág. 44).
- La abstracción es la delimitación mental de ciertas propiedades de los objetos y su segregación de todas las demás propiedades (pág. 38).

Dubinsky (1991) discute el proceso de abstracción en La abstracción reflexiva en el pensamiento matemático avanzado. Para una presentación más detallada de la actividad de generalización, describiré los significados que el análisis y la síntesis tienen en la taxonomía de Bloom revisada y cómo Dubinsky interpretó los tres tipos de abstracción de Piaget en el estudio del pensamiento matemático.

El proceso de análisis implica dividir el "material en sus partes constituyentes y detectar cómo las partes se relacionan entre sí y con una estructura o propósito general" (Krathwohl, 2002, p. 215). Sus subcategorías son la diferenciación, organización y atribución. La síntesis es el proceso que reúne "elementos para formar un todo nuevo, coherente o hacer un producto original" (Krathwohl, 2002, p. 215). Tiene las subcategorías de generación, planificación y producción. La siguiente acción incluida en los esquemas para la actividad de generalización es la abstracción. Para la descripción de este proceso, se utiliza la revisión de Dubinsky del trabajo de Piaget, sobre el proceso de abstracción en matemáticas, disperso en muchos artículos y libros escritos por Piaget en sus últimos 15 años de vida.

Piaget consideró tres etapas del proceso de abstracción (Dubinsky, 1991):

a) Abstracción empírica, consiste en derivar declaraciones de las propiedades externas de los datos dados. Como explicó Dubinsky, significa extender las propiedades de ser particulares a "algunos" datos (los dados) a "todos" los datos posibles.

b) Abstracción pseudo-empírica, es intermediario entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. La pseudo-abstracción consiste en derivar nuevas propiedades mediante la transformación de los datos iniciales.

c) Abstracción reflexiva, en este proceso, para delinear las propiedades generales, el foco está en un solo caso y las acciones se coordinaron mediante el uso de funciones mentales elevadas que están involucradas en operaciones lógico-matemáticas (por ejemplo, usando leyes, propiedades, conceptos matemáticos conocidos).

Las tres etapas del proceso de abstracción están interrelacionadas. Las abstracciones pseudo-empíricas y reflexivas están utilizando los resultados de la abstracción empírica. Antes de realizar una abstracción reflexiva, los procesos de abstracciones empíricas y pseudo-empíricas pueden llevarse a cabo más de una vez. Además, si consideramos todas las acciones involucradas en el proceso de generalización (análisis, síntesis y abstracción), no hay un orden estricto en el que se realicen. Sin embargo, podemos dirigirnos a través de una actividad de generalización utilizando como referencia las tres rutas a través de la generalización descritas por Rubinshtein.

Las tres rutas de Rubinshtein a través de la generalización

Como lo cita Davydov (1990), Rubinshtein notó tres rutas hacia la generalización, que describen las acciones tomadas para completar la actividad de generalización:

a) La primera ruta se llama "generalización empírica". En este caso, el objetivo de encontrar una declaración general se logra a través de acciones que tienen el propósito de determinar qué tienen en común algunos objetos. Esta acción se realiza a través de operaciones que conducen a identificar cada objeto. Estas operaciones suelen ser comparaciones que describen cómo un objeto es similar o idéntico a otros objetos. Rubinshtein describió que la primera ruta es la "generalización empírica" de la siguiente manera:

"… [La generalización empírica elemental] se logra como resultado de la comparación al señalar las propiedades generales (similares) en las que coinciden los fenómenos que se comparan. ... Este tipo de generalización es simplemente una selección de una serie de propiedades que se dan de forma empírica, directa y sincera; por lo tanto, no es capaz de conducir al descubrimiento de nada por encima de lo que se da directamente, por los sentidos "(Cita tomada de Davydov, 1990, p. 192)

Para la generalización empírica, la operación mental primaria es la comparación, que es el método o técnica lógica por la cual se determinan los atributos comunes de objetos particulares (Davydov, 1990, p. 38). Las operaciones aplicadas durante la acción de comparación utilizan solo lo que se da inmediatamente y la información recibida a través de los sentidos. No se realiza ninguna transformación en los datos de la fila.

b) La segunda ruta se llama generalización científica o teórica. Se enfocar la actividad mental en el análisis y la abstracción. El propósito del análisis es distinguir lo que es esencial de lo que no es esencial. Lo esencial de un objeto es una característica que permanece sin cambios en el objeto cuando se transforma durante sus interacciones con otros objetos. Cuando se delinea lo esencial, se abstrae de inmediato. Entonces el resumen puede sintetizarse en una conclusión concreta, mediante una restauración mental e interpretación de los fenómenos observados. Esta generalización se describe como:

"No es simplemente una selección sino también una transformación ... La transformación de lo que se da inmediatamente, que conduce a un concepto abstracto de un fenómeno, consiste en romper el contacto ... de las circunstancias concomitantes, que complican o enmascaran la esencia de los fenómenos". (Rubinshtein, citado por Davydov, 1990, p. 193)

c) Rubinshtein mencionó una tercera ruta a través de la generalización que se puede tomar. Esta ruta requiere una derivación teórica que se “realiza mediante un movimiento bidireccional de lo general a lo particular y de lo particular a lo general: la generalización y la cognición teórica están interrelacionadas” (Davydov, 1990, p. 194).

Tres categorías de actividades de generalización matemática

Similar a la descripción de Rubinshtein de los tres tipos de procesos de pensamiento que pueden desarrollarse durante una actividad de generalización, en las actividades matemáticas podemos considerar tres rutas que conducen a la generalización: la generalización empírica, la generalización pseudo-empírica y la generalización reflexiva. El elemento clave, que diferencia las actividades de generalización, es el propósito de la acción de abstracción. Por lo tanto, las categorías de actividades de generalización matemática siguen las tres "rutas" a través de la generalización descritas por Rubinshtein potenciadas por las categorías de abstracción resumidas por Dubinsky a partir del trabajo de Piaget.

La primera categoría de actividades de generalización matemática. Una actividad de generalización empírica involucra las acciones de análisis, síntesis y abstracción empírica. El propósito de la acción de análisis es separar la situación del problema en partes distintas. Luego, al comparar las partes entre ellas, determinamos las propiedades comunes de estos componentes.

La segunda categoría de actividades de generalización matemática involucra la generalización pseudo-empírica. Las acciones utilizadas en este proceso son análisis, síntesis y pseudo-abstracción.

La tercera categoría de actividades matemáticas es la generalización reflexiva. En una generalización reflexiva, las acciones involucradas son análisis, síntesis y abstracción reflexiva.

V. Hipótesis

Hipótesis general

El proceso de comprensión de los grupos diédricos vía la generalización de las propiedades y teoremas de los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre, se caracterizan por ser esencialmente pseudo-empírica, fundamentado en las estrategias aritméticas recursivas.

Hipótesis específicas

Las hipótesis específicas son:

a) Las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes de álgebra moderna para construir los grupos diédricos son las aritméticas y recursivas, de manipulación de objetos concretos y gráfico visuales.

b) El nivel de comprensión de los grupos diédricos que desarrollar los estudiantes se basa en la generalización empírica, pseudo-empírica y la reflexiva.

VI. Objetivo general

Caracterizar el proceso de comprensión vía la generalización de las propiedades y teoremas de los grupos diédricos en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre.

VII. Objetivos específicos

I. Identificar las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes de educación matemática para deducir o inferir las propiedades y teoremas de los grupos diédricos cuando realizan actividades de construcción de los grupos de simetrías de los polígonos regulares.

II. Determinar el nivel de comprensión de los grupos diédricos que desarrollan los estudiantes con la realización de actividades de construcción de los grupos de simetrías de los polígonos regulares para generalizar propiedades y teoremas.

VIII. Metodología de investigación

La metodológica es del tipo “investigación y desarrollo” es decir optara por la experimentación de diseños, porque se pretende, primero, aportar conocimiento detallado sobre el estado actual de la formación del profesor en el área curricular de matemáticas y la identificación de los factores que la condicionan; segundo, se diseñaran recursos y materiales didácticos específicos para mejorar la formación matemática y didáctica de los profesores a través de la experimentación de diseños de instrucción. La educación matemática es una “ciencia de diseño” como los señalan Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2010. Estos investigadores sostienen que la educación matemática es una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En síntesis, la metodología tiene su base en *The Design Research Methods in Education* (Kelly, Lessh & Baek, 2008), Paul Cobb y Koeno Gravemeijer (2008). Esta metodología tiene las siguientes fases:

<u>Primera Fase: Estudio Preliminar</u>

El estudio preliminar se realizará en relación con el marco teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquirido sobre los grupos diédricos. Los análisis preliminares más frecuentes son (Artigue, 1998 p. 38):

- El análisis epistemológico de los grupos diédricos.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización de la ingeniería didáctica.

Concepción y análisis a priori

Este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha diseñado y se va a proponer a los alumnos:

- Se describen las elecciones locales (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor.
- Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

Segunda Fase: Preparación para el experimento

Clarificación de los Objetivos de Instrucción

- Los objetivos se han institucionalizado en el currículo, son el producto de la historia, la tradición y las prácticas de evaluación (estándares).
- En lugar de aceptarlas incuestionablemente, se problematiza el objetivo de enseñanza aprendizaje.

Documentación de los Puntos de Inicio de la Instrucción

1. Identificar los tipos de generalización actual de los estudiantes sobre los cuales se deben construir la comprensión de las propiedades y teoremas de grupos diédricos.
2. Evaluar el razonamiento inductivo con el fin de entender porque utilizan formas particulares de generalización.
3. Documentar la historia de los procesos de enseñanza aprendizaje previos a la experiencia.
4. Determinar qué aprenden usualmente los estudiantes en la unidad “Grupos de permutación” en el contexto del programa curricular y los estándares.

Tercera Fase: Experimentación para apoyar el aprendizaje

Algunas técnicas e instrumentos de recolección de datos:

- Entrevistas previas y posteriores individuales con los estudiantes de formación docente.

- Dossier de los trabajos escritos de los alumnos.

- Evaluación de procesos de generalización, plasmados como notas de campo.

Marcos interpretativos

En el proceso de experimentación para apoyar el aprendizaje, el equipo de investigación realizará interpretaciones continuas tanto de la actividad de los participantes como del entorno de aprendizaje en el que se encuentran. Estas interpretaciones en curso informan sobre el diseño y las decisiones de enseñanza y aprendizaje y por lo tanto moldean el esfuerzo de diseño profundamente. Los marcos emergen en períodos de varios años mientras se intenta entender eventos específicos en las aulas, estos surgen del esfuerzo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Las interpretaciones de los eventos de clase se retroalimentan y documentan el esfuerzo del proceso de enseñanza aprendizaje.

Ciclos de Diseño y Análisis

Dos tratamientos complementarios de la explicación causal: Primero, la causalidad se basa en las regularidades observadas en un número de casos y una explicación de los procesos; segundo, las explicaciones viables de este tipo pueden discernirse sobre la base de un solo caso, sobre todo si el equipo de investigación utiliza un marco interpretativo bien establecido que ha sido perfeccionado durante una serie de experimentos previos(Maxwell, 2004: 4).

Se abstraerá una ***teoría de instrucción específica del dominio*** concretizados en conceptos, propiedades, principios, normas abstraídas sobre un proceso de aprendizaje puntual y fundamentado que culmina con el logro de metas de aprendizaje, así como los medios utilizados para apoyar ese proceso de aprendizaje.

<u>Cuarta Fase: Análisis retrospectivo</u>

El objetivo del análisis retrospectivo dependerá de la intención teórica del experimento de diseño. Los temas que se consideran en esta fase son: La gramática argumentativa de los análisis, la confiabilidad, la replicabilidad y la generalización de los resultados. Estos análisis retrospectivos buscarán ubicar los aprendizajes y los medios de apoyo en un contexto teórico más amplio, enmarcando el mismo como un caso paradigmático de un fenómeno más abarcador.

Instrumentos de recogida de datos elaborados

a) Cuestionario para la evaluación de la comprensión de la generalización de los grupos diédricos.

Técnicas de análisis de datos

Se usarán diversas técnicas tanto cualitativas como cuantitativas, dependiendo de las fases e instrumentos de la investigación.

Para los datos obtenidos de los cuestionarios, se aplicarán técnicas estadísticas estándares, en particular, resúmenes descriptivos y tendencias a través de la observación transversal.

Plan de Trabajo y Tareas previstas

T1: Revisión de la bibliografía específica sobre: Procesos, niveles y actividades de la generalización matemática.

T2: Construcción de un banco de situaciones sobre los grupos diédricos.

T3: Diseño de actividades para la comprensión de los procesos de generalización de los grupos diédricos.

T4: Aplicación piloto de los cuestionarios; análisis de resultados y revisión del cuestionario.

T5: Recolección de datos para su análisis e interpretación.

Población y Muestra de Estudio

La población de interés está constituida por los estudiantes que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre durante dos semestres académicos 2021 I y 2021 II de la especialidad de Matemática, Física, Informática y Computación de la Facultad de Ciencias de la Educación.

La muestra intencional está constituida por un grupo de 40 estudiantes, su selección es intencional por el criterio de accesibilidad.

IX. Referencias

American Educational Research Association, American Psychological Association & National Council On Measurement In Education-1999. (2008). Standards for Educational and Psychological Testing. Washington: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 49(5), 389-407.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: The foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. ZDM The international Journal on Mathematics Education, 40(1): 1.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology,Engineering and Mathematics Learning and Teaching (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Consejo Nacional de Educación (CNE). (2007). Estándares de aprendizaje Definición, tensiones y propuesta para el Perú. Lima: CNE.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008) Generalising mathematical structure in Years 3-4: A case study of equivalence of expression. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A., (Eds.) Proceedings of the 32th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), (pp. 369-376). Morelia, México.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), Early algebraization. Advances in mathematics education. (pp. 187-211). Berlin: Springer-Verlag.

Correa Muñoz, H. E. (2017). Estrategias y formas de razonamiento en estudiantes de undécimo grado en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales. Tesis de maestría. Universidad de Medellín

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula (Soviet Studies in Mathematics Education, Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (2008). Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study. Nova Science, NY.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. Educational Researcher, 32(1), 5-8.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (Ed.), Mathematical Knowledge: It's Growth Throught Teaching (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Vol. 1): 258-264. Melbourne: University of Melbourne.

García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. Olivier, A., Newstead, K. (Eds). Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics (PME),Vol. 2 (pp 329- 336). Stellenbosch: University of Stellenboch.

Hernández S., R.; Fernández C.,C.; Baptista L.,P. (1991) Metodología de la Investigación. México. Edit. Mc. Graw Hill.

Krutetskii,V . A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren, (translated from the Russian by J. Teller). Chicago,IL: University of Chicago Press.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. Mathematics Teaching in the Middle School, 8(7), 342-349.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic activities culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (Vol. 18): 87-106. Kluwer academic publishers.

Leontiev, A. (1978). Activity, Consciousness, and Personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee (Ed.), Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching, 65-86. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Moss, J., y London, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. En, J. Cai, E. Knuth (eds.), Early algebraization. Advances in mathematics education, (pp. 277-298). Berlin: Springer-Verlag.

National Council Of Teachers Of Matematics, (NCTM) U.S.A. (2004). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales-NCTM.

National Council Of Teachers Of Matematics, NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Pérez Peña, J. J. (2005). La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del algebra elemental. Tesis de maestría presentado en la Universidad de Antioquia.

Piaget, J. (1964). Development and learning. In: R.E. Ripple and V.N. Rockcastle, Editors. Piaget rediscovered. Cornell University Press, Ithaca, 7–19. https://doi.org/10.1002/tea.3660020305

Presmeg, N. C. (1999). On visualization and generalization in mathematics. Hitt, F. y Santos, M. (Eds.), Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 1 (pp 23-27). Cuernavaca: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In J. L. Alatorre, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter (Vol. 1): 2-21. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, Méjico.

Rubinshtein, S. L. (1994). Thinking and ways of investigating it. Journal Of Russian and East European Psychology, 32 (5), 63-93. https://doi.org/10.2753/rpo1061-0405320563

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. Educational Studies in Mathematics, 20(2), 147-164.

Valencia, J. y Gutiérrez V. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. Educación Matemática, vol. 30, núm. 2. pp. 49-72.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological Processes. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/1421493

Vygotsky, L. S. (1986). Thought and language. A. Kozulin (Ed). Cambridge, MA: MIT Press. https://doi.org/10.1017/S0272263100008172

Vygotsky"s educational theory in cultural context. NY: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511840975.013

Yeap, B.-H., & Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalization: A glimpse from a Singapore classroom. Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 40(1): 55-64.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. Educational Studies in Mathematics, 49, 379-402.

X. Uso de los resultados y contribuciones del proyecto

Los resultados de la investigación serán publicados para que los profesores de matemática de la región para que los puedan incorporar en su labor de enseñanza.

XI. Impactos esperados

Impacto en Ciencia y Tecnología

Desarrollo de material didáctico para la formación profesional de estudiantes de álgebra moderna, que quedará traducido en un manual universitario "*Didáctica del álgebra moderna*".

XII. Cronograma de actividades

La realización de la investigación se organiza en cuatro fases que pasamos a detallar en el cronograma:

Fase: Diseño: Fase de Ejecución: Enero-abril 2021

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Búsqueda de información	Investigación de artículos especializados en el tópico de investigación.	Enero 2021
	Revistas, informes, actas.	Febrero 2021
Análisis de la información	Evaluación del estado actual de la teoría sobre análisis de libros de texto.	Marzo 2021
	Estudio y evaluación de otras investigaciones y su metodología usada.	Abril 2021

Fase: Fase de Análisis y valoración: Mayo - setiembre 2021

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Desarrollo teórico	Construcción del marco teórico	Mayo 2021
	Formulación de los instrumentos de evaluación	Junio 2021
Obtención de datos experimentales	Evaluación de competencias de los estudiantes	Julio 2021
	Categorización de las observaciones	Agosto 2021
	Formulación de resultados preliminares	Setiembre 2021

Fase: Octubre–noviembre 2021

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Obtención de conclusiones	Sistematización de los datos recogidos y su evaluación.	Octubre 2021
	Análisis de los resultados de la investigación y elaboración de conclusiones	Noviembre 2021

Fase: Redacción y Edición: Diciembre 2021

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Redacción del documento definitivo	Primera redacción del informe preliminar	Diciembre 2021
	Redacción del informe	Diciembre 2021

XVI. Financiamiento

El proyecto de investigación será autofinanciado mientras no se consiga otra fuente de financiamiento. El presupuesto total es de 3000 soles.