UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

VICERRECTORADO DE INVESTIGACION

PROYECTO DE INVESTIGACION

1. Título del Proyecto

   Uso de las descomposiciones matriciales en ciencias e ingenierías

2. Área de Investigación

Area de Investigación	Linea de investigación	Disciplina OCDE
Matemática Aplicada	Matemática aplicada	Matemática

3. Duración del proyecto (meses)

   12 meses

4. Tipo de proyecto

Individual	
Multidiciplinario	x
Director de Tesis de pregrado	

5. Datos de los integrantes del proyecto

Apellidos y Nombres	Ariel Rogelio Velazco Cárdenas
Escuela Profesional	Cs. Físico Matemáticas
Celular	957709205
Correo electrónico	ariel_vc@yahoo.com

Apellidos y Nombres	Mirsa Dolores Cruz Cuentas
Escuela Profesional	Cs. Físico Matemáticas
Celular	958187599
Correo electrónico	dolycruz@yahoo.com.pe

I. Título

Uso de las descomposiciones matriciales en ciencias e ingenierías

II. Resumen

En el álgebra lineal, una descomposición de matriz o factorización de matriz es una factorización de una matriz en un producto de matrices. Hay muchas descomposiciones de matriz diferentes; cada uno encuentra uso entre una clase particular de problemas, nuestro objetivo es mostrar como el álgebra Lineal es una herramienta fundamental en el análisis de datos y permite formular algoritmos de solución sistemáticos y eficientes. trataremos tópicos como Descomposición LU, método de eliminación gaussiana. Transformaciones ortogonales: Householder y Givens. Descomposición QR, Cholesky, Schur, espectral y SVD. Métodos para calcular valores singulares. Autovalores y autovectores. Matriz de Hessenberg. El problema de los mínimos cuadrados. Pseudoinversas. Veremos como estas descomposiciones matriciales son utilizadas en diferentes áreas de las ciencias e ingenierias y tomaremos énfasis también en su fundamentación teórica y escribiremos algorimos de descomposición matricial en un leguage de programación.

III. Palabras clave

Descomposición Matricial, Álgebra Lineal Aplicada.

IV. Justificación

Las matemáticas aplicadas se basan en dos pilares centrales: cálculo y álgebra lineal. Mientras que cálculo tiene sus raíces en las leyes universales de la física newtoniana, el álgebra lineal surge de un problema mucho más mundano: la necesidad de resolver sistemas simples de ecuaciones algebraicas lineales. A pesar de sus orígenes humildes, el álgebra lineal termina desempeñando un papel comparablemente profundo tanto en matemáticas aplicadas como teóricas, así como en toda la ciencia e ingeniería, incluyendo ciencias de la computación, análisis de datos y aprendizaje maquina, imágenes y procesamiento, probabilidades y estadística, economía, análisis numérico, biología matemática y muchas otras disciplinas. Hoy en día, una base adecuada tanto en cálculo como en álgebra lineal es un requisito previo esencial para una carrera exitosa en ciencia, tecnología, ingeniería, estadística, ciencia de datos y, por supuesto, matemáticas.

Desde Newton, y, en mayor medida después de Einstein, la ciencia moderna se ha enfrentado a la no linealidad inherente del universo macroscópico. Pero la mayor parte de nuestra visión y progreso se basa en aproximaciones lineales. Además, a nivel atómico, la mecánica cuántica sigue siendo una teoría inherentemente lineal. (La reconciliación completa de la teoría cuántica lineal con el universo relativista no lineal sigue siendo el santo grial de la física moderna.) Sólo con el advenimiento de las computadoras a gran escala hemos sido capaces de comenzar a investigar toda la complejidad de los fenómenos naturales. Pero las computadoras se basan en algoritmos numéricos, y estos a su vez requieren manipular y resolver sistemas de ecuaciones algebraicas. Ahora, en lugar de sólo un puñado de ecuaciones, podemos enfrentarnos a sistemas gigantescos que contienen miles (o incluso millones) de incógnitas. Sin la disciplina del álgebra lineal para formular algoritmos de solución sistemáticos y eficientes, así como la consiguiente visión de cómo proceder cuando la solución numérica no es suficientemente precisa, no podríamos avanzar en el régimen lineal, y mucho menos dar sentido al universo físico verdaderamente no lineal.

Así, el álgebra lineal puede ser visto como el aparato matemático necesario para resolver sistemas lineales potencialmente enormes, para entender su estructura subyacente y para aplicar lo aprendido en otros contextos. El término "lineal.es la clave, y, de hecho, se refiere no sólo a ecuaciones algebraicas lineales, sino también a ecuaciones diferenciales lineales, tanto ordinarias como parciales, problemas de valor límite lineal, ecuaciones integrales lineales, sistemas iterativos lineales, sistemas de control lineal, etc. Es una verdad profunda que, si bien son externamente diferentes, todos los sistemas lineales son notablemente similares en su núcleo. Principios matemáticos básicos como la superposición lineal, la interacción entre sistemas homogéneos y no homógenos, la alternativa de Fredholm que caracteriza la solabilidad, la ortogonalidad, la definición positiva y los principios de minimización, los auto valores y los valores singulares, y la iteración lineal, por nombrar sólo unos pocos, se repiten en contextos sorprendentemente muchos ostensiblemente no relacionados.

A finales del siglo XIX y principios del XX, los matemáticos llegaron a la realización de que todas estas técnicas dispares podían ser subsumidas en el edificio ahora conocido como álgebra lineal. Entender y, lo que es más importante, explotar las aparentes similaridades entre, digamos, ecuaciones algebraicas y ecuaciones diferenciales, requiere que seamos más sofisticados, es decir más abstractos en nuestro modo de pensar. El proceso de abstracción destila la esencia del problema lejos de todas sus particularidades distraídas, y, visto en esta luz, todos los sistemas lineales descansan sobre un marco matemático común. En matemáticas aplicadas, no introducimos abstracción por su belleza intrínsica. Nuestro propósito final es desarrollar métodos y algoritmos eficaces para aplicaciones en ciencia, ingeniería, computación, estadística, ciencia de datos, etc. Para nosotros, la abstracción está impulsada por la necesidad de comprensión y perspicacia, y sólo se justifica si ayuda en la solución a los problemas del mundo real y al desarrollo de herramientas analíticas y computacionales. Mientras que para el estudiante principiante los conceptos iniciales pueden parecer diseñados simplemente para desacertar y confundir, uno debe reservar el juicio hasta que aparezcan las solicitudes genuinas. La paciencia y la perseverancia son vitales. Una vez que se haya adquirido cierta familiaridad con el álgebra lineal básica, las aplicaciones significativas e interesantes son vistas en teoría gráfica y redes, estructuras mecánicas, circuitos eléctricos, mecánica cuántica, la geometría subyacente a los gráficos y animación por ordenador, procesamiento de señales e imágenes, interpolación y aproximación, sistemas dinámicos modelados por ecuaciones diferenciales lineales, vibraciones, resonancia y amortiguación, procesos de probabilidad y estocásticos, estadísticas, análisis de datos, splines y diseño de fuentes modernos, y una gama de potentes algoritmos de soluciones numéricas, por nombrar algunos.

Las matemáticas aplicadas se pueden dividir ampliamente en tres componentes que se refuerzan mutuamente. La primera es el modelado: cómo se derivan las ecuaciones que rigen de los principios físicos. La segunda es la solución de técnicas y algoritmos: métodos para resolver las ecuaciones del modelo. El tercero, quizás menos apreciado, pero en muchos sentidos más importante, son los marcos que incorporan métodos analíticos dispares en algunos temas generales. Los temas del álgebra lineal aplicada que trataremos son: Descomposición LU, método de eliminación gaussiana. Transformaciones ortogonales: Householder y Givens. Descomposición QR, Cholesky, Schur, espectral y SVD. Métodos para calcular valores singulares. Autovalores y autovectores. Matriz de Hessenberg. El problema de los mínimos cuadrados. Pseudoinversas.

V Antecedentes

La literatura escrita acerca de los temas de estudio del presente trabajo y puede ser vista en las referencias del presente proyecto.

VI. Hipótesis

El álgebra Lineal es una herramienta fundamental en el análisis de datos y permite formular algoritmos de solución sistemáticos y eficientes.

VII. Objetivo General

Utilizar herramientas del Álgebra Lineal para resolver problemas en diferentes areas del conocimiento

VIII. Objetivos Específicos

Fundamentar teoricamente los resultados

Escribir algorimos de descomposición matricial en un leguage de programación

IX. Metodología

Inductivo-Deductivo

X. Referencias

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., and Ratiu, T., Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Springer–Verlag, New York, 1988.

[2] Apostol, T.M., Calculus, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Mass., 1967–69.

[3] Baker, G.A., Jr., and Graves–Morris, P., Pad´e Approximants, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v. 59, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[4] Behrends, E., Introduction to Markov Chains, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, Germany, 2000.

[5] Bertalmío, M., Image Processing for Cinema, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[6] Bollobás, B., Graph Theory : An Introductory Course, Graduate Texts in Mathematics, vol. 63, Springer–Verlag, New York, 1993.

[7] Boyce, W.E., and DiPrima, R.C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[8] Bradie, B., A Friend ly Introduction to Numerical Analysis, Prentice–Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2006.

[9] Brigham, E.O., The Fast Fourier Transform, Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[10] Briggs, W.L., and Henson, V.E., The DFT. An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.

[11] Burgisser, P., Clausen, M., and Shokrollahi, M.A., Algebraic Complexity Theory, Springer–Verlag, New York, 1997.

[12] Buss, S.A., 3D Computer Graphics, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[13] Cantwell, B.J., Introduction to Symmetry Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[14] Chung, F.R.K., Spectral Graph Theory, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 92, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1997.

[15] Cooley, J.W., and Tukey, J.W., An algorithm for the machine computation of complex Fourier series, Math. Comp. 19 (1965), 297–301.

[16] Courant, R., and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Interscience Publ., New York, 1953.

[17] Crowe, M.J., A History of Vector Analysis, Dover Publ., New York, 1985.

[18] Daubechies, I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[19] Davidson, K.R., and Donsig, A.P., Real Analysis with Real Applications, Prentice–Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2002.

[20] DeGroot, M.H., and Schervish, M.J., Probability and Statistics, Third Edition, Addison–Wesley, Boston, 2002.

[21] Demmel, J.W., Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[22] Diacu, F., An Introduction to Differential Equations, W.H. Freeman, New York, 2000.

[23] Durrett, R., Essentials of Stochastic Processes, Springer–Verlag, New York, 1999.

[24] Enders, C.K., Applied Missing Data Analysis, The Guilford Press, New York, 2010.

[25] Farin, G.E., Curves and Surfaces for CAGD : A Practical Guide, Academic Press, London, 2002.

[26] Fine, B., and Rosenberger, G., The Fundamental Theorem of Algebra, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1997.

[27] Fortnow, L., The Golden Ticket: P, NP, and the Search for the Impossible, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2013.

[28] Foucart, S., and Rauhut, H., A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, Birkha¨user, Springer, New York, 2013.

[29] Francis, J.G.F., The QR transformation I, II, Comput. J. 4 (1961–2), 265–271, 332–345.

[30] Gohberg, I., and Koltracht, I., Triangular factors of Cauchy and Vandermonde matrices, Integral Eq. Operator Theory 26 (1996), 46–59.

[31] Goldstein, H., Classical Mechanics, Second Edition, Addison–Wesley, Reading, MA, 1980. [32] Golub, G.H, and Van Loan, C.F., Matrix Computations, Third Edition, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.

[33] Graver, J.E., Counting on Frameworks : Mathematics to Aid the Design of Rigid Structures, Dolciani Math. Expo. No. 25, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2001.

[34] Guckenheimer, J., and Holmes, P., Nonlinear Oscil lations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Appl. Math. Sci., vol. 42, Springer–Verlag, New York, 1983.

[35] Haar, A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. 69 (1910), 331–371.

[36] Hale, J.K., Ordinary Differential Equations, Second Edition, R. E. Krieger Pub. Co., Huntington, N.Y., 1980.

[37] Herrlich, H., and Strecker, G.E., Category Theory ; an Introduction, Allyn and Bacon, Boston, 1973.

[38] Herstein, I.N., Abstract Algebra, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[39] Hestenes, M.R., and Stiefel, E., Methods of conjugate gradients for solving linear systems, J. Res. Nat. Bur. Standards 49 (1952), 409–436.

[40] Higham, N.J., Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2002.

[41] Hirsch, M.W., and Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.

[42] Hobson, E.W., The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series, Dover Publ., New York, 1957.

[43] Hogg, R.V., Tanis, E.A., and Zimmerman, D.L., Probability and Statistical Inference, Nineth Edition, Pearson Education Inc., Boston, MA, 2013.

[44] Hoggatt, V.E., Jr., and Lind, D.A., The dying rabbit problem, Fib. Quart. 7 (1969), 482–487.

[45] Hoory, S., Linial, N., and Wigderson, A., Expander Graphs and Their Applications, Bul l. Amer. Math. Soc. 43 (2006), 439–561.

[46] Hotelling, H., Analysis of complex of statistical variables into principal components, J. Educ. Pshchology. 24 (1933), 417–441, 498–520.

[47] Jolliffe, I.T., Principal Component Analysis, Second Edition, Springer–Verlag, New York, 2002.

[48] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Corrected Printing of Second Edition, Springer–Verlag, New York, 1980.

[49] Keener, J.P., Principles of Applied Mathematics. Transformation and Approximation, Addison–Wesley Publ. Co., New York, 1988.

[50] Krall, A.M., Applied Analysis, D. Reidel Publishing Co., Boston, 1986.

[51] Kublanovskaya, V.N., On some algorithms for the solution of the complete eigenvalue problem, USSR Comput. Math. Math. Phys. 3 (1961), 637–657.

[52] Langville, A.N., and Meyer, C.D., Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006..

[53] Mandelbrot, B.B., The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman, New York, 1983.

[54] Messiah, A., Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[55] Misner, C.W., Thorne, K.S., and Wheeler, J.A., Gravitation, W.H. Freeman, San Francisco, 1973.

[56] Moon, F.C., Chaotic Vibrations, John Wiley & Sons, New York, 1987.

[57] Murray, R.N., Li, Z.X., and Sastry, S.S., A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

[58] Nilsson, J.W., and Riedel, S., Electric Circuits, Seventh Edition, Prentice–Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2005.

[59] Olver, F.W.J., Lozier, D.W., Boisvert, R.F., and Clark, C.W., eds., NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[60] Olver, P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer–Verlag, New York, 1993.

[61] Olver, P.J., Introduction to Partial Differential Equations, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2014.

[62] Ortega, J.M., Numerical Analysis ; a Second Course, Academic Press, New York, 1972. [63] Oruç, H., and Phillips, G. M., Explicit factorization of the Vandermonde matrix, Linear Algebra Appl. 315 (2000), 113–123.

[64] Page, L., Brin, S., Motwani, R., Winograd, T.; The PageRank citation ranking: bringing order to the web; Technical Report, Stanford University, 1998.

[65] Pearson, K., On lines and planes of closest fit to systems of points in space, Phil. Mag. 2 (1901), 559–572.

[66] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery, B.P., Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[67] Reed, M., and Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, New York, 1972.

[68] Royden, H.L., Real Analysis, Macmillan Co., New York, 1988.

[69] Saad, Y., Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, Classics Appl. Math., vol. 66, SIAM, Philadelphia, 2011.

[70] Saad, Y., Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2003.

[71] Saad, Y., and Schultz, M.H., GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 7 (1986), 856–869.

[72] Salomon, D., Computer Graphics and Geometric Modeling, Springer–Verlag, New York, 1999.

[73] Sapiro, G., Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[74] Schumaker, L.L., Spline Functions : Basic Theory, John Wiley & Sons, New York, 1981.

[75] Sommese, A.J., and Wampler, C.W., Numerical Solution of Polynomial Systems Arising in Engineering and Science, World Scientific, Singapore, 2005.

[76] Spielman, D., Spectral graph theory, in: Combinatorial Scientific Computing, U. Naumann and O. Schenk, eds., Chapman & Hall/CRC Computational Science, Boca Raton, Fl, 2012, pp. 495–524.

[77] Stein, E.M., and Shakarchi, R., Fourier Analysis: An Introduction, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[78] Stewart, J., Calculus : Early Transcendentals, Fifth Edition, Thomson Brooks Cole, Belmont, CA, 2003.

[79] Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley Cambridge Press, Wellesley, Mass., 1986.

[80] Strang, G., Linear Algebra and Its Applications, Third Edition, Harcourt, Brace, Jovanovich, San Diego, 1988.

[81] Strang, G., and Fix, G.J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[82] Strassen, V., Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969), 354–356. [83] Tannenbaum, P., Excursions in Modern Mathematics, Fifth Edition, Prentice–Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J, 2004.

[84] Tapia, R.A., Dennis, J.E., Jr., and Schafermeyer, J.P., Inverse, shifted inverse, and Rayleigh quotient iteration as Newton's method, SIAM Rev. 60 (2018), 3–55.

[85] van der Vorst, H.A., Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[86] Varga, R.S., Matrix Iterative Analysis, Second Edition, Springer–Verlag, New York, 2000.

[87] Walpole, R.E., Myers, R.H., Myers, S.L., and Ye, K., Probability and Statistics for Scientists and Engineers, Nineth Edition, Prentice–Hall, Inc.,

Upper Saddle River, N.J., 2012.

[88] Walter, G.G., and Shen, X., Wavelets and Other Orthogonal Systems, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fl, 2001.

[89] Watkins, D.S., Fundamentals of Matrix Computations, Wiley–Interscience, New York, 2002.

[90] Wilkinson, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.

[91] Wilson, E.B., Jr., Decius, J.C., and Cross, P.C., Molecular Vibrations: The Theory of Infrared and Raman Vibrational Spectra, Dover Publ., New York, 1980.

[92] Yaglom, I.M., Felix Klein and Sophus Lie, Birkha¨user, Boston, 1988. [93] Yale, P.B., Geometry and Symmetry, Holden–Day, San Francisco, 1968.

XI Uso de los resultados y contribuciones del proyecto

Los resultados servirán para resolver problemas aplicativos del ágebra lineal, via descomposiciones matriciales.

XII. Impactos esperados

Se espera la apertura del área de algebra linel aplicada para la investigación en matemática aplicada de los futuros graduandos de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas

XIII. Recursos necesarios

Recursos Humanos: Los Docentes

XIV. Localización del proyecto

Ciudad de Puno

XV. Cronograma de actividades

Actividad	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Conceptos generales	X	X	X									
Sistemas lineales algébricos y ortogonalidad				X	X	X						
Autovalores y valores singulares							X	X	X			
Algoritmos y pruebas numéricas										X	X	X

XVI. Presupuesto.

Descripción	Unidad de med.	Costo unit. (S/.)	Cantidad	Costo total (S/.)
Material de escritorio	Kit	300	2	600
Bibliografia física	libro	400	2	800
Bibliografia virtual	libro/artículo	250	8	2000
Visita centros de investigación	Viaje	2000	2	4000
TOTAL				7400