

I Título del proyecto FEDU:
MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR CURVAS DE LACTANCIA EN
VACUNOS BROWN SWISS DEL CENTRO EXPERIMENTAL
CHUQUIBAMBILLA, PUNO

Presentado por:
Gerardo Godofredo Mamani Choque

II. RESUMEN

Una curva de lactancia es la síntesis de un proceso biológico que puede ser representado y explicado mediante alguna función matemática a partir de información registrada durante el periodo de lactación, su utilidad es el pronóstico de producción de leche, planificación de la producción y selección de modo que permitan alcanzar la eficiencia productiva. Para ello, se utilizará la información de registros de ordeño de vacunos Brown Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, Puno, para probar el ajuste de un conjunto de modelos matemáticos como: Wood, Compartamental, Parabólico exponencial, Papajcsik y Bordero, Brody, Alí y Shaefer, Lineal hiperbólico, y otros, que se agrupan en modelos intrínsecamente no lineales e intrínsecamente lineales. El objetivo de esta investigación es estimar 11 modelos matemáticos; seis mediante el método no lineal y cinco mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, seleccionando posteriormente el de mejor bondad de ajuste, capacidad explicativa de los parámetros y la medida en qué sub estima o sobre estima la producción real. Las características que serán evaluados son: la producción en el pico de lactancia, tiempo para alcanzar el pico de lactancia y producción total a los 305 días. Además, a partir del modelo matemático seleccionado, se definirá la mejor estrategia de muestreo para optimizar la temporalidad de registro de producción de leche y uso eficiente de recursos.

III. Palabras clave (Keywords): curva de lactancia, modelos, vaca lechera, característica lactancia.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el altiplano peruano, los sistemas de producción agropecuario responden a las características predominantes de la región (condiciones ambientales adversas, riesgo productivo, sequías, heladas y precipitaciones pluviales) que definen una vocación productiva en cada zona de la región (Ccama, 1991). Así, la crianza de ganado bovino de doble propósito (carne y leche) se viene intensificando durante los últimos años porque constituye una fuente importante de ingresos monetarios y de menor riesgo económico en relación a los cultivos.

De acuerdo a las estadísticas agropecuarias correspondiente a 15 años (1995-2009; MINAG), la producción de leche se incrementó considerablemente (11.85%), debido principalmente al incremento en la productividad, ya que la población promedio de vacunos creció a una tasa de 1.06% y el número de animales en ordeño creció en 1.94%. La razón de ello, es que esta actividad económica provee a los productores, ingresos monetarios importantes que oscilan entre S/. 185 y S/. 625 mensuales, calculados en base a un número de vacas en ordeño que oscilan entre 3 y 7 (Mamani, S. et al; 2010).

En cambio, la producción de carne se mantuvo prácticamente estancado porque el número de animales destinados a la saca, tuvo una tasa de crecimiento de 1.06% y la producción de carne creció a una tasa anual de 1.56%, demostrando que, durante este periodo, el mejoramiento genético se orientó principalmente hacia la producción de leche. Además, entre 2007-2018 se ha priorizado el cultivo de alfalfa puesto que su tasa de crecimiento anual fue el más alto con 14.07% (área cosechada), demostrando mayor importancia de la actividad ganadera (Mamani et al., 2019).

Por otro lado, la ganadería lechera en el altiplano, cobra importancia, entre otros factores, porque requiere de inversión mínima en infraestructura, se basa en el consumo de pastos naturales, forrajes (avena) y pastos cultivados (alfalfa-dactylis, trebol, Rye grass). Es una actividad económica que responde apropiadamente a las características y limitaciones de los sistemas de producción del altiplano: recursos de poca calidad, escaso capital y mano de obra poco capacitada. Es una opción tecnológica rentable, que provee a los productores ingresos monetarios mayores que la mayoría de los cultivos (Mamani, 2010).

Otra característica importante de la ganadería en el altiplano, es el predominio del minifundio, donde los productores desarrollan actividades agropecuarias básicamente con fines de subsistencia. La poca tecnificación y especialización constituyen las principales limitaciones de su desarrollo. En este contexto, la ganadería bovina de doble propósito adquiere gran importancia. Sin embargo, en la región de Puno no se han investigado temas importantes como la caracterización de los sistemas de producción de leche en términos de curvas de lactancia. Así mismo, no existen investigaciones respecto a estrategias de muestreo de la producción de leche para minimizar el número de observaciones que se deben recolectar para minimizar recursos humanos y económicos en el proceso de investigación.

Así, los objetivos de esta investigación deben responder a las siguientes preguntas: *¿Cuál es la función matemática que mejor describe una curva de lactancia y predice adecuadamente la producción de leche?, ¿Para obtener estimaciones adecuadas de curvas de lactancia, en qué intervalos de tiempo se debe registrar la producción de leche para minimizar el tiempo y recursos económicos?*

IV. JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO

El interés por caracterizar curvas de lactancia está centrado en su utilidad como medio para predecir la producción de leche de un hato, que se encuentra asociado con la rentabilidad de esta actividad económica. Otro factor importante es el diagnóstico de factores biológicos, como la alimentación, que pueden modificar el desarrollo y la forma de la curva de lactancia.

Sin embargo, no existe un modelo idóneo generalizable para todos los sistemas de producción lechero, porque en la producción de leche influyen las condiciones particulares de cada explotación, evidenciando la necesidad de investigar considerando las peculiaridades de cada explotación, sustentado además por una estrategia de muestreo que permita minimizar tiempo y recursos económicos.

Finalmente, la fase de caracterización de los sistemas de producción en el altiplano, dependen de la información que aportan los diagnósticos estáticos, sin embargo, algunas variables como la producción de leche tienen carácter dinámico (Sotelo *et al.*, 2017). De esta forma es primordial analizar la información disponible en universidades o centros experimentales, ya que los diagnósticos dinámicos son costosos en términos de tiempo y recursos económicos.

VI. HIPÓTESIS DE TRABAJO

El interés del modelamiento de curvas de lactancia en vacunos Brown Swiss, se refleja en un conjunto de modelos matemáticos que permiten una interpretación biológica o económica pero no todos describen y predicen de manera adecuada, por lo que es necesario evaluar y seleccionar el que presente mejor ajuste para ser usados en procesos de selección.

6.1 Hipótesis específicas

- a. Las curvas de lactancia, siendo una representación matemática de un proceso biológico que relacionan la producción de leche y el tiempo de lactación, se ajusta apropiadamente a algunas funciones matemáticas en base a la capacidad predictiva de la producción de leche.
- b. Considerando que los datos de producción diaria constituyen la población, es posible definir un tamaño óptimo de muestra a partir del cual se pueda obtener estimaciones de curvas de lactancia similares a las que se obtienen con los datos de población, de esta forma se podrá tener una referencia de la frecuencia de tiempo para implementar registros de producción en explotaciones que no cuentan con tales registros.

VII. OBJETIVO GENERAL

Lograr una mejor comprensión de la naturaleza matemática y biológica de las diferentes formas de las curvas de lactancia de producción de leche, analizando su idoneidad y las características de los parámetros de función, de modo que sea útil para el pronóstico, planificación de la producción y selección en base a las características deseables de productividad.

VIII. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a. Ajustar comparativamente 11 funciones matemáticas, identificando las que mejor expliquen la producción de leche de bovinos Brown Swiss del Instituto Nacional de Innovación Agraria – INIA, Puno.
- b. Determinar un número óptimo de registros de producción de leche necesarios para estimar curvas de lactancia que permitan obtener estimaciones similares a los utilizados con registros diarios de producción de leche.

V. ANTECEDENTES DEL PROYECTO

Cañas, Cerón-Muñoz, & Corrales (2012), evaluaron cinco modelos matemáticos que representan curvas de lactancia (Wood, Brody, Wilmlink, Papajcsik y Bordero), estimando con todas ellas las características importantes en vacunos Holstein de Colombia. Las características evaluadas fueron la producción en el pico de lactancia (y_{max}), tiempo al pico de lactancia (t_{pico}) y producción total a los 305 días (P305). Los resultados que encontraron indican que el modelo de Wood presentó los mejores valores en cuanto a criterios de selección de modelos y bondad de ajuste (R^2). El patrón de producción encontrado se describe mediante la producción media inicial de 16.64 ± 6.34 lt, producción máxima de 27.39 ± 6.85 lt, un tiempo de 44.55 ± 13.19 días para alcanzar el pico de lactancia y 6212 ± 1690 lt, de producción total en un periodo de 305 días.

López et al. (2015), ajustaron la producción de leche acumulada a seis funciones de crecimiento clásicas (monomolecular, Schumacher, Gompertz, logística, Richards y Morgan) como una forma diferente de predicción de la producción de leche, utilizando información de vacunos Holstein en Canadá. Las funciones fueron estimadas mediante procedimientos de regresión no lineal y su rendimiento evaluado mediante estadísticas de bondad de ajuste (coeficiente de determinación, cuadrados medios residuales, criterio de información de Akaike y los coeficientes de correlación y concordancia entre los rendimientos de leche observados y ajustados). Encontraron que todas las funciones se ajustan de manera aceptable, siendo mejor la ecuación de Richards seguido por la de Morgan, y la menos precisa la ecuación logística. Concluyen que las funciones de crecimiento clásicas, especialmente las sigmoideas con un punto de inflexión, son alternativas viables para adaptarse a las curvas acumulativas de producción de leche, lo que resulta en un rendimiento estadístico adecuado y estimaciones precisas de los rasgos de lactancia.

Quintero, Serna, Hurtado Lugo, Noguera Solano, & Cerón Muñoz, (2007), indican que una curva de lactancia sirve para el pronóstico de la producción total a partir de muestras parciales, planificación del hato con predicción confiable de la producción y selección a partir de las características de la curva. Previamente se debe definir la función matemática que mejor describe la curva de lactancia, para el que se han propuesto diferentes modelos matemáticos como Papajcsik y Bordero, Sikka, Brody y Wood; la validez y selección de los mismos depende ciertos criterios y bondad de ajuste. Los autores presentan una revisión de diferentes modelos matemáticos empleados en la estimación de curvas de lactancia con el propósito de interpretar los cambios que ocurren en la producción de leche durante una lactancia. Concluyen que existen diversas fórmulas matemáticas para la estimación de curvas de lactancia y su persistencia en ganado lechero y cada modelo permite predecir la producción total de leche a partir de producciones parciales, característica de gran importancia para la evaluación genética en bovinos lecheros.

Las investigaciones realizadas en la región de Puno son limitadas. León-Velarde C. y Quiroz R. (1994), estimaron curvas de lactancia utilizando los modelos Gamma incompleta y

Compartamental, estimando una producción promedio de 4012 ± 630 y 4087 ± 611 k, respectivamente. En relación a los datos observados, el primer modelo subestimó en -0.6%, mientras que el segundo sobreestimó en 1.2%, concluyendo que se pueden utilizar estos modelos para predecir la producción media de un hato.

Mamani et al (2009), en una investigación preliminar, estimaron curvas de lactancia a partir de información registrada en un periodo de un año en dos lugares: Illpa y Achaya. El único modelo estimado fue Gamma incompleta debido a limitaciones en la información. Los parámetros estimados para vacunos Brown Swiss en proceso de mejoramiento y distintos niveles de productividad fueron, en Illpa: para vacunos con rendimiento mayor a 10 lt./día $y = 8.0227t^{0.2434}e^{-0.0063t}$, para vacunos con rendimiento menor a 10 lt./día $y = 1.9966t^{0.4244}e^{-0.00595t}$; para vacunos en Achaya la estimación fue $y = 2.8845t^{0.2372}e^{-0.0035t}$.

En otras regiones y países, se usaron numerosas funciones matemáticas para representar curvas de lactancia para diferentes razas. Quintero J. *et al* (2007), describieron doce modelos matemáticos para describir curvas de lactancia en bovinos y bufalinos. Entre los modelos intrínsecamente lineales describieron los siguientes: Lineal, cuadrático, cuadrático logarítmico, lineal hiperbólico, modelo de Alí y Shaefer y, polinomial inverso. Mientras que los modelos intrínsecamente no lineales que describieron fueron: Gamma incompleta, parabólico exponencial, modelo de Wiltmink, modelo de Papajcsik y Bordero, modelo de Cobby y modelo de Brody.

Rodríguez L., (2005), estimó curvas de lactancia a partir de los siguientes modelos: exponencial negativo, gamma incompleto y polinomial de quinto orden. En otros casos (Arango J. et al), se usó únicamente el modelo polinomial de quinto orden por la facilidad que implica la estimación de sus parámetros, pero los parámetros estimados no tienen interpretación clara.

Tekerli M., Akinci Z., Dogan I, y Akcan A. (2000), estimaron curvas de lactancia en vacunos Holstein, de la provincial Balikesir de Turquía a partir de la función gamma. Aplicando transformación logarítmica a la función original, encontraron que el modelo estimado explica el 71% de las variaciones del rendimiento diario. Entre los factores no genéticos estudiados (manejo, año de parto, estación de parto, grupo de lactación y, periodo de servicio) fueron significativos varios rasgos de la curva de lactación. El pico de lactancia y los rendimientos, fueron mayores para vacas que parieron en otoño e invierno y, la persistencia fue mayor en vacunos cuyos partos tuvieron lugar en las estaciones de verano y otoño. En cambio, la persistencia mayor se registró en vacunos de primera lactación.

Val-Arreola D., Kebreab E., Dijkstra J., y France J. (2004), evaluaron cinco funciones matemáticas para describir curvas de lactancia, en dos sistemas de manejo diferentes en México, con el objetivo de comparar y evaluar según su habilidad para predecir y describir curvas de lactancia. Los modelos estimados fueron Gaines, Wood, Rook, Dijkstra y Pollott. La información fue analizada por grupos de lactación: primer parto, segundo parto y, tercero parto y mayores. En todo los casos, excepto para mayores al segundo parto del sistema de pequeña escala, la ecuación de Gaines reportan un mejor ajuste. Indican que la ecuación de Wood explica muchas de las variaciones, pero que sus parámetros no tienen interpretación biológica directa. La ecuación Rook predice bien los datos pero algunos de los parámetros estimados no fueron significativos. La ecuación de Dijkstra permitió las mejores predicciones, con parámetros significativos e interpretación fisiológica.

Schneeberger M. (1981), indica que los parámetros B y C (β_1 y β_2) del modelo gamma, estimados para vacunos Brown Swiss, caracterizan el incremento y la disminución de la curva de lactancia; junto con la medida de persistencia, son elementos de interés particular en el análisis de formas de curvas de lactancia. Reporta que los parámetros B y C fueron mayores con el incremento del número de lactación, en cambio, menciona que la medida de persistencia disminuye con el incremento del número de lactaciones. Define además como casos atípicos, aquellos cuyo valor de los parámetros B y C fueron negativos; el porcentaje de estos casos (21.79%), disminuyen con el incremento del número de lactaciones.

Respecto al efecto de estación de parto, menciona que los partos durante el invierno mostraron incremento de la producción durante el inicio de lactación y, una disminución más pronunciada después del pico de lactancia, para vacunos con parto en la estación de verano. Encontró que el efecto del periodo de servicio fue importante, Así, las vacas preñadas poco después del parto, tuvieron una curva de lactancia más decreciente y medida de persistencia menor en relación a las vacas con largo periodo de servicio.

Ferris T. A., Mao I. L., y Anderson C. R. (1985), indican que el conocimiento de la relación genética entre las características de la curva de lactación y el rendimiento de lactación es esencial en la selección, porque las vacas con alta eficiencia de producción producen beneficios netos mayores. Las características de la curva de lactación son heredables y estrechamente relacionados con el rendimiento de leche, que podrían ser usados como índices de selección en el mejoramiento genético, así como para producir cambios deseables de la curva. Reportan que este factor no se toma en cuenta en la selección por la dificultad que implica su medición.

Sherchand L., McNew R. W., Kellogg, D. W. y Johnson Z. B. (1995), reportan que el efecto del número de lactaciones fue significativo ($p < 0.05$), sin embargo, no encontraron diferencias significativas entre las lactaciones 2, 3 y 4 ($p > 0.05$). Evaluando veinte modelos matemáticos para describir curvas de lactancia, concluyen que la función logística difásica tuvo la mejor predicción de producción de leche para las cuatro lactaciones, donde los rendimientos de leche fueron de 5,402 hasta 11,015 kg., por tanto, describe adecuadamente la curva de lactación para vacas Holstein, resaltando su utilidad para lograr eficiencia reproductiva y manejo adecuado de la alimentación.

En suma, existen varios modelos matemáticos que pueden describir las características de una curva de lactancia, siendo el más utilizado el modelo Gamma incompleta propuesto por Wood en 1967, que tiene la propiedad de ser estimado incluso mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios y describe de manera adecuada una curva de lactancia.

Los modelos matemáticos no lineales son los utilizados con menor frecuencia debido a dificultad que implica el proceso de estimación de parámetros.

Estrategias de muestreo

Una característica común de la mayoría de los sistemas de producción de leche es la ausencia de registros de producción, razón por la cual no se han realizado investigaciones sobre curvas de lactancia a nivel de productores y diferentes niveles tecnológicos. Se trata de una variable dinámica que demanda recursos económicos y tiempo. Por esta razón, no existen

investigaciones en la región de Puno sobre comparación de funciones matemáticas con diferentes frecuencias de registros de producción de leche en bovinos.

En diferentes investigaciones, se estimaron curvas de lactancia principalmente a partir de información diaria o semanal, pero es muy escasa la información sobre la bondad de ajuste de diferentes funciones matemáticas, cuando la información corresponde a diferentes estrategias de muestreo de la producción de leche.

Ramirez R. *et al* (2004), en una investigación sobre comparación de ecuaciones para estimar curvas de lactancia con diferentes estrategias de muestreo en bovinos Angus, Suizo y sus cruza, concluyen que las funciones matemáticas Gamma incompleta y parabólica exponencial tienen mayor versatilidad para alcanzar buenos ajustes bajo diversas condiciones, correspondiendo el mejor ajuste a la estrategia de registro de producción de leche con intervalos de 14 días.

Silvestre A. M., Petim-Batista F, y Colaco J. (2006), a través del análisis de residuales que compara las diferencias entre el rendimiento diario observado y estimado, concluyen que siete funciones matemáticas describieron la curva de lactancia con precisión similar. En ocho estrategias de muestreo, las diferencias de la bondad de ajuste más resaltantes se evidenciaron al reducir la disponibilidad de datos. La precisión de los modelos Wood, Wilmink y, Ali and Schaeffer fueron particularmente afectados por el incremento en los intervalos de muestreo. Los resultados indican que la capacidad predictiva de los modelos estudiados depende de los intervalos de muestreo, pero también es influenciado por una alta variabilidad entre los partos observados. Señalan que los registros de producción de leche con intervalos mayores a un mes no son recomendables para definir adecuadamente los modelos de curvas de lactancia.

VI. MARCO TEORICO

5.1 Curvas de lactancia

La producción de leche durante un ciclo productivo, conocido como periodo de lactancia, se representa por una función matemática denominada curva de lactancia. En el caso de bovinos, se han propuesto diversas funciones matemáticas con el propósito de describir los aspectos más relevantes (Figura 1) como son el nivel de producción inicial, el tiempo en el que se alcanza la producción máxima, la producción máxima conocida también como pico de producción, la persistencia o nivel en el que se mantiene la producción y, la longitud de la lactancia, que se describen a partir de los parámetros de cada función matemática (Botero L. y Vertel M., 2006; Quintero J., et al., 2007).

La curva de lactancia se puede caracterizar por varios parámetros:

Duración de la lactancia definida por el intervalo. Se estandariza en un intervalo de 5 a 305 días.

Producción total. Se considera de gran importancia económica, matemáticamente se traduce como la integral de una función matemática durante el intervalo de duración de la lactancia.

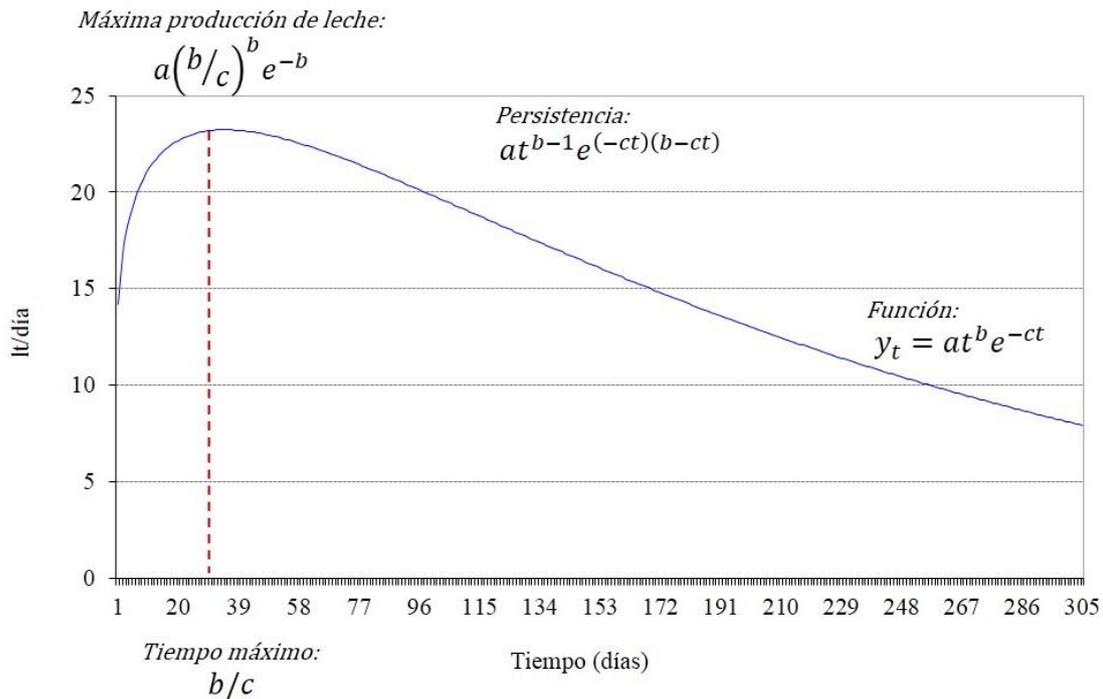
Producción inicial. Estimada por el promedio de las producciones del 4º, 5º y 6º días posparto.

Tasa de crecimiento en la fase ascendente. Comprende desde el parto hasta la máxima producción.

La producción máxima diaria y la fecha en la que se observa este máximo. El pico de producción es el mayor rendimiento de lactancia, y su fecha se expresa en unidades de

tiempo (Wood, 1967). Para cualquier modelo matemático de ajuste de la curva de lactancia, el valor máximo se obtiene mediante un proceso de optimización matemática.

FIGURA 1
CURVA DE LACTANCIA EN BOVINOS: MODELO DE WOOD



Fuente: Elaborado en base a Duque, Casellas, Quijano, Casals, & Such, (2018).

El modelo matemático denominado Gamma incompleta, propuesto por Wood (1967), es el más utilizado para describir curvas de lactancia en bovinos y se representa como:

$$y = \beta_0 t^{\beta_1} e^{-\beta_2 t}$$

donde:

Y: rendimiento estimado en el estado de lactancia n, k/día.

t: producción de leche en el n-ésimo día del periodo de lactancia.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$: parámetros del modelo.

e: función exponencial.

El parámetro β_0 de este modelo, representa la escala de producción del animal a través del periodo de lactancia, es decir, los valores altos significan mayor productividad. El parámetro β_1 está relacionado con la fase de desarrollo; los valores altos harán que se alcance más rápido el pico de producción. El parámetro β_2 representa la pendiente de la curva en la fase de recuperación o última fase de lactancia; si el valor absoluto es pequeño representa una ligera disminución en la producción, y la curva declina suavemente (León-Velarde; Quiroz, 1994).

En este modelo, la persistencia de lactación, se define como: $S = -(\beta_1 + 1)\ln(\beta_2)$. Este es un indicador importante porque las vacas con persistencia alta de lactación, tienden a producir menos leche de lo esperado al principio y más de lo esperado al final (Cole J. B. and Null D. J., 2009).

El tiempo en el que se obtiene el valor más alto de la producción se calcula optimizando la función respecto al tiempo, es decir, derivando parcialmente respecto a t . De esta forma, el tiempo en el que se alcanza el pico de producción es:

$$t_{pico} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad (2)$$

Mientras que la producción máxima se obtiene reemplazando (2) en (1) y se obtiene la siguiente función:

$$y_{max} = \beta_0 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\beta_1} e^{-\beta_1}$$

Este modelo también se puede estimar mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios porque se trata de un modelo intrínsecamente lineal; aplicando una transformación logarítmica se obtiene un modelo lineal en los parámetros: $\ln y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln t - \beta_2 t$. Sin embargo, los resultados no son idénticos porque se trata de diferentes métodos de estimación.

Siendo un hecho biológico, se asume que existe una gran variabilidad entre individuos genéticamente idénticos (Rodríguez L. et al. 2005). Por tanto, la curva de lactancia puede ser representado por un conjunto de modelos matemáticos con características específicas.

IX. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

9.1 Lugar de estudio

La investigación se llevará a cabo en la ciudad de Puno con información del Centro Experimental Chuquibambilla, Puno, correspondiente a registros diarios de lactación que se organizará en una hoja de Excel, identificando a los animales en producción, y producción total de leche por día.

9.2 Población y muestra

La información corresponde a un periodo de lactancia completa para vacas de la raza Brown Swiss en modalidad de doble ordeño, por tanto, se trata de información de la población.

Los modelos que serán estimados son los siguientes:

Modelos intrínsecamente lineales:

a. Modelo cuadrático

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t - \beta_2 t^2 \quad \text{Dave, (1971)}$$

b. Modelo cuadrático logarítmico

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t - \beta_2 t^2 + \beta_3 \ln t \quad \text{Singh \& Gopal, (1982)}$$

c. Modelo lineal hiperbólico

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t - \beta_2 t^{-1} \quad \text{Fraga et al., (2003)}$$

d. Modelo polinomial inverso

$$y_t = \frac{t}{\beta_0 + \beta_1 t - \beta_2 t^2} \quad \text{Nelder, (1966)}$$

e. Modelo exponencial negativo

$$y_t = \beta_0 e^{-\beta_1 t} \quad \text{Fernandez et al., (2001)}$$

f. Modelo de Alí y Shaefer

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{t}{305}\right)^2 + \beta_3 \ln \frac{305}{t} + \beta_4 \left(\ln \frac{305}{t}\right)^2 \quad \text{Ali \& Schaeffer, (1987)}$$

donde y_t es el rendimiento de leche en el día t , β_0 es el parámetro asociado con el pico de rendimiento, β_3 y β_4 son parámetros asociados con el incremento de la pendiente, β_1 y β_2 representan la disminución de la pendiente.

Modelos intrínsecamente No Lineales

a. Modelo de Gamma incompleta

$$y = \beta_0 t^{\beta_1} e^{-\beta_2 t} \quad \text{Wood, (1967)}$$

b. Modelo Compartamental

$$y = A e^{-Bt} [1 - e^{-C(t-D)}] \quad \text{McMillan, (1981)}$$

c. Modelo parabólico exponencial

$$y_t = \beta_0 e^{\beta_1 t - \beta_2 t^2} \quad \text{Sikka, (1950)}$$

d. Modelo de Papajcsik y Bodero

$$y_t = \beta_0 t e^{-\beta_1 t} \quad \text{Papajcsik \& Bodero, (1988)}$$

e. Modelo de Brody

$$y_t = \beta_0 e^{-\beta_1 t} - \beta_0 e^{-\beta_2 t} \quad \text{Brody et al., (1924)}$$

Para todos los modelos, y_t representa el rendimiento de leche en el día t , y los β_i son los parámetros del modelo. Para todos los casos, se establecerá analíticamente las funciones para calcular el tiempo en el que se alcanza la producción máxima o pico de lactancia y, la producción máxima.

Las variables están definidas como:

Y: producción de leche en el t -ésimo día de lactación (k/día), ajustado a un periodo de producción convencional de 305 días por ciclo productivo.

t : día del periodo de lactación; t : 1, 2, ...305

Método de Mínimos cuadrados ordinarios

Para estimar los parámetros de los modelos lineales se usará el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) que se denota matricialmente como:

$$\hat{\beta}0 = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

donde:

$(X'X)^{-1}$: es la matriz inversa de variables independientes.

$X'Y$: es el vector producto de la variable dependiente y variables independientes $X'Y$.

La validez estadística del modelo en conjunto se efectuará mediante la prueba F:

$$F = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / (k-1)}{\sum \hat{u}_i^2 / (n-k)}$$

donde k es el número de parámetros, n es el número de observaciones, \hat{Y}_i es el estimado de la variable Y_i , \bar{Y} es la media de Y_i , $\sum \hat{u}_i^2$ es la suma de residuales al cuadrado y, F sigue una distribución con k-1 y n-k grados de libertad, que resulta del análisis de varianza (ANVA), donde la hipótesis nula es: $H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ y la hipótesis alterna: $H_a: \beta_j \neq 0$, (Gujarati D, 2003).

CUADRO 2
ANALISIS DE VARIANZA

Fuente de variación	G. de L.	Suma de cuadrados	Cuadrado Medio	Fc
Debido al modelo	k-1	$\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	SCM / k-1	$\frac{CMM}{CMR}$
Debido al residual	n-k	$\sum \hat{u}_i^2$	SCR / n-k	
Total	n-1	$\sum Y_i^2$		

La prueba individual de los parámetros se efectuará mediante la prueba t-student de la

siguiente forma: $t_{\hat{\beta}_j} \equiv \frac{\hat{\beta}_j}{ee(\hat{\beta}_j)}$

donde $\hat{\beta}_j$ es el parámetro estimado, y $ee(\hat{\beta}_j)$ es el error estándar del parámetro estimado.

La bondad de ajuste de un modelo de regresión mide el porcentaje de variación total de Y explicado por las variables independientes a través del coeficiente de determinación (R^2),

calculado como: $R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum y_i^2}$

Método de Mínimos cuadrados no lineales

Las ecuaciones normales para la regresión no lineal tienen incógnitas en ambos miembros de la ecuación, por tanto, no se pueden obtener soluciones explícitas de los parámetros, de modo que la suma de error de cuadrados se minimiza mediante un proceso iterativo. Estos

procesos de estimación, denominados métodos iterativos se conocen como Gauss-Newton y Newton- Raphson (Gujarati D., 2003).

Por tanto, la estimación de los modelos no lineales se realizará mediante el procedimiento NLIN del software estadístico SAS/STAT ® (Statistical Analysis System) que ajusta los modelos mediante diferentes métodos. En esta investigación se usará el método Marquardt (Pérez C., 2001).

Método de optimización

El pico de lactancia se obtiene mediante el método de optimización denominado condición de primer orden. Dada una función $f(x)$, la primera derivada $f'(x)$, permite encontrar los valores extremos. Si hay un extremo relativo en $x=x_0$, se define como máximo relativo cuando $f'(x)$ cambia de positivo a negativo al pasar por x_0 . En caso contrario corresponde a una función convexa.

En cambio, la segunda derivada permite determinar si una función es cóncava o convexa, permitiendo localizar los puntos de inflexión, si éstos existen. Si la segunda derivada, $f''(a)$ de una función $y=f(x)$ es negativa, $y'=f'(x)$ es una función de x decreciente en $x=x_0$, por tanto, es cóncava hacia abajo o convexo. Es decir, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. El caso contrario corresponde a una función cóncava hacia arriba (Chiang A., 1967; Weber J., 1999).

El procesamiento de la información se efectuará con el software SAS/STAT ® (Statistical Analysis System), tanto para la depuración y consistenciación de la información a través de estadísticos descriptivos, como para la estimación de los modelos planteados en la presente investigación, mediante el procedimiento NLIN.

VIII. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

VIII. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

Las actividades se desarrollarán de acuerdo con el siguiente cronograma:

Año 2022													
Actividades	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic	
Revisión de antecedentes	x	x	x										
Análisis matemáticos de los modelos				x	x	x							
Estimación y validación de los modelos				x	x	x							
Recolección y digitación de la información				x	x	x							
Depuración de la información								x	x	x			
Estimación y análisis de los modelos								x	x	x			
Redacción del informe final											x	x	x

IX. PRESUPUESTO

Los recursos necesarios para la ejecución de esta investigación serán asumidos en su integridad por el ejecutor. Las actividades más importantes serán la depuración y procesamiento de la información. Los recursos humanos y económicos necesarios para la ejecución de la investigación serán los siguientes:

Descripción	Concepto	Costo (S/.)
Recursos humanos	Servicios personales diversos	2500.00
Materiales	Materiales de escritorio	1000.00
	Material bibliográfico	1000.00
	Fotocopias y otros	500.00
Análisis de la información	Consistenciación y depuración de la información	1000.00
	Procesamiento de la información	2000.00
Otros gastos	Equipos	3500.00
	Impresiones y empastado	500.00
	Pasajes y otros	5000.00
	Imprevistos	1000.00
Total		18,000.00

X. REFERENCIAS

- Ali, T. E., & Schaeffer, L. R. (1987). Accounting for covariances among test day milk yields in dairy cows. *Canadian Journal of Animal Science*, 67(3), 637–644. <https://doi.org/10.4141/cjas87-067>
- Brody, S., Turner, C., & Ragsdale, A. (1924). The relation between the initial rise and the subsequent decline of milk secretion following parturition. *The Journal of General Physiology*, 6, 541–545.
- Cañas, J., Cerón-Muñoz, M., & Corrales, J. (2012). Modelación y parámetros genéticos de curvas de lactancia en bovinos Holstein en Colombia. *Revista MVZ Cordoba*, 17(2), 2998–3003. <https://doi.org/10.21897/rmvz.234>
- Ccama, F. (1991). *Desarrollo rural: Posibilidades y limitaciones en Puno*. INIAA-PISA, ACDI, CIID.
- Cardenas Mansilla, Claudio Sebastián. *Segmentación de curvas de lactancia de bovinos, mediante cluster análisis y análisis discriminante lineal, aplicado al primer tercio de lactancia*. *Agro sur*. [online]. ago. 2009, vol.37, no.2 [citado 26 Agosto 2010], p.126-

133. Disponible en la World Wide Web: <http://mingaonline.uach.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0304-88022009000200006&lng=es&nrm=iso>. ISSN 0304-8802.
- Chiang, Alpha. (1967). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Centro Regional de Ayuda Técnica. Agencia para el desarrollo Internacional (AID). México.
- Cole J. B. and Null D. J. (2009). *Genetic evaluation of lactation persistency for five breeds of dairy cattle*. Journal Dairy Science. Disponible en URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre, 10, 2010.
- Dave, B. (1971). First lactation curve of Indian water buffalo. *JNKVV Res. J.*, 5, 93.
- Duque, N. P., Casellas, J., Quijano, J. H., Casals, R., & Such, X. (2018). Fitting lactation curves in a Colombian Holstein herd using nonlinear models. *Revista Facultad Nacional de Agronomía Medellín*, 71(2), 8459–8468.
<https://doi.org/10.15446/rfna.v71n2.67424>
- Fernandez, L., Menéndez, A., Guerra, W., & Suárez, M. (2001). Estimación de curvas de lactancias estándar de la raza Siboney para su utilización en extensiones de lactancia. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, 35(2), 99–104.
- Ferris T. A., MAO I. L., and Anderson C. R. (1985). *Selecting for Lactation Curve and Milk Yield in Dairy Cattle*. Journal Dairy Science. Disponible en URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre, 14, 2010.
- Fraga, L. M., Gutierrez, M., Fernández, L., & Fundora, O. (2003). Estudio preliminar de las curvas de lactancia en búfalas mestizas de Murrah. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, 37(2), 151–155.
- García-Muñiz, José Guadalupe, Martínez-González, Enrique Genaro, Nunez-Dominguez, Rafael et al. *Comparación de ecuaciones para ajustar curvas de lactancia en bovinos*. Rev. Cient. (Maracaibo). [online]. abr. 2008, vol.18, no.2 [citado 26 Agosto 2010], p.160-169. Disponible en la World Wide Web: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-22592008000200007&lng=es&nrm=iso>. ISSN 0798-2259.
- Gujarati, Damodar (2003). *Econometría*. Cuarta Edición. México. Mc Graw Hill.
- Hernández Robier y Ponce Pastor (2007). *Caracterización de la curva de lactancia y componentes lácteos del genotipo Siboney de Cuba en una granja ganadera de la provincia de la Habana*. Consultado en: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/959/95918309.pdf>
- León-Velarde Carlos, Quiroz Roberto, (1994). *Análisis de sistemas agropecuarios: Uso de métodos bio-matemáticos*. Puno, Perú. CONDESAN, CIP – CIID- CIRNMA.
- Little Thomas y Hills F. Jackson (). *Métodos estadísticos para la investigación en la agricultura*. Editorial Trillas.
- López, B. B., Esperón, S.A.E., Flores, V.C.H. y Pérez, H.E *La curva de lactación de vacas jersey bajo el modelo lineal parabólico*. Consultado en

http://ammveb.net/XXIX%20CNB/memorias/medpro/oral_medpro04.doc

- López, S., France, J., Odongo, N. E., McBride, R. A., Kebreab, E., AlZahal, O., McBride, B. W., & Dijkstra, J. (2015). On the analysis of Canadian Holstein dairy cow lactation curves using standard growth functions. *Journal of Dairy Science*, 98(4), 2701–2712. <https://doi.org/10.3168/jds.2014-8132>
- Mamani S., (2010). *Línea de base del proyecto ALTAGRO*. Puno – Perú.
- Mamani S., Ojeda R. y Mamani W. (2009). *Curvas de lactancia en vacunos: Casos de estudio en Illpa y Achaya*. Puno – Perú. Proyecto ALTAGRO.
- Mamani, S., Espinoza, J., & Chura, E. (2019). *Importancia de la agricultura en la región de Puno*.
- McMillan, I. (1981). Comportamental model analysis of poultry egg production curves. *Poultry Science*, 60, 1549–1551.
- Nelder, J. A. (1966). *Inverse polynomials, a useful group of multi-factor response functions*. 22(1), 128–135.
- Ossa S. Gustavo, Torregroza S. Lino y Alvarado Leonardo. *Determinación de la curva de lactancia en vacas mestizas de un hato de doble propósito en la Región Caribe de Colombia*. Consultado en: http://www.corpoica.org.co/SitioWeb/Archivos/Revista/8_Determinacindelacurvadel.PDF
- Papajcsik, I. A., & Boderó, J. (1988). Modelling lactation curves of Friesian cows in a subtropical climate. *Animal Production*, 47(2), 201–207. <https://doi.org/10.1017/S0003356100003275>
- Pedraza Carlos, Mansilla Alberto, Jahn Ernesto, Vidal Agustín, Fajardo Paola y Agüero Hernán (2001). *Aplicación de un modelo múltiple de curva de lactancia para vacas lecheras*. Consultado en: <http://alerce.inia.cl/agriculturattec/Documentos/v.62%2804%29/NR29142%20p%20509-518.pdf>
- Pérez Lopez, Cesar. (2001). *El sistema estadístico SAS ®, The SAS system for Windows ® 8e*. Madrid - España. Prentice Hall.
- Quintero, J., Serna, J., Hurtado Lugo, N., Noguera Solano, R., & Cerón Muñoz, M. (2007). Modelos matemáticos para curvas de lactancia en ganado lechero. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 20(2), 149–156.
- Quintero Vélez, Juan Carlos, Serna Gallo, Jorge, Cerón Muñoz Mario, Lugo Naudin Hurtado, Gómez Divier Agudelo Antonio. *Estimación de la curva de lactancia mediante modelos matemáticos lineales y no lineales en búfalas colombianas*. Disponible en: http://www.lasallistavirtual.edu.co:81/dspace/bitstream/123456789/67/1/Estimacion_de_la_curva_de_lactancia_mediante_modelos_matematicos_lineales_y_no_lineales_en_bufalas_colombianas.pdf

- Ramirez Velarde R., García-Muñiz J.G., Nuñez Domínguez R., Ruiz Flores A., Meraz Alvarado Ma. del R. *Comparación de ecuaciones para estimar curvas de lactancia con diferentes estrategias de muestreo en bovinos Angus, Suizo y sus cruza*. Consultado en: <<http://revistaveterinaria.fmvz.unam.mx/fmvz/revvetmex/a2004/rvmv35n3/rvm35303.pdf>>
- Rodríguez Z. Luis, Ara G. Miguel, Huamán U. Héctor. y Echevarría C. Luisa. *Modelos de ajuste para curvas de lactación de vacas en crianza intensiva en la cuenca de Lima*. Consultado en <<http://www.scielo.org.pe/pdf/rivep/v16n1/a01v16n1.pdf>>
- Sainz Roberto D., Baldwin R. Lee., Vernazza Ricardo F. *Modelos de crecimiento digestión y lactancia en bovinos*. Consultado en: http://www.corpoica.org.co/SitioWeb/Archivos/Revista/8_Modelosdecrecimientodigesti.PDF
- Sikka, L. C. (1950). A study of lactation as affected by heredity and environment. *Journal of Dairy Research*, 17(3), 231–252. <https://doi.org/10.1017/S0022029900005811>
- Silvestre A. M., Petim-Batista F, and Colaco J. (2006). *The Accuracy of Seven Mathematical Functions in Modeling Dairy Cattle Lactation Curves Based on Test-Day Records From Varying Sample Schemes*. *Journal Dairy Science*. Disponible en URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre, 10, 2010.
- Schneeberger M. (1981). *Inheritance of Lactation Curve in Swiss Brown Cattle*. *Journal Dairy Science*. Disponible en URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre, 11, 2010.
- Sherchand L., McNew R. W., Kellogg, D. W. and Johnson Z. B. (1995). *Selection of a Mathematical Model to Generate Lactation Curves Using Daily Milk Yields of Holstein Cows*. *Journal Dairy Science*. Disponible en URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre, 17, 2010.
- Singh, R., & Gopal, R. (1982). Lactation curve analysis of buffalo es maintained under village conditions. *Indian J Dairy Science*, 17, 1–17.
- Sotelo Cabrera, M. E., Suárez Salazar, J. C., Álvarez Carrillo, F., Castro-Nuñez, A., Calderón Soto, V. H., & Arango, J. (2017). Sistemas sostenibles de producción ganadera en el contexto amazónico Sistemas silvopastoriles:¿ una opción viable?. *Publicación CIAT*.
- Tekerli M, Akinci Z, Dogan I, and Akcan A. (2000) *Factors Affecting the Shape of Lactation Curves of Holstein Cows from the Balikesir Province of Turkey*. *Journal Dairy Science*. Disponible en: URL:<http://www.journalofdairyscience.org>. Consultado Diciembre 9, 2010.
- Torres Leon Adrian Enrique. *Pico de lactación en vacunos tropicales*. Consultado en: <<http://www.monografias.com/trabajos61/lactacion-vacunos/lactacion-vacunos2.shtml>>
- Val-Arreola D, Kebreab E, Dijkstra J, and France J. (2004). *Study of the Lactation Curve in Dairy Cattle on Farms in Central Mexico*. *Journal Dairy Science*. Disponible en:URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre 9, 2010.

Wayne Kellogg D., Scott Urquhart N., and ORTEGA A. J. (1976) *Estimating Holstein Lactation Curves with a Gamma Curve*. Journal Dairy Science. Disponible en URL:<http://www.journalofdairyscience.org> Consultado Diciembre, 11, 2010.

Weber Jean, (1999). *Matemáticas para administración y economía*. Cuarta edición. Oxford University Press. México.25

Wood, P. (1967). Algebraic model of the lactation curve in cattle. *Nature (London)*, 216, 164.

I. Uso de los resultados y contribuciones del proyecto

En la actualidad, no existe un modelo idóneo generalizable para todos los sistemas de producción lechero, porque en la producción de leche influyen las condiciones particulares de cada explotación, evidenciando la necesidad de investigar considerando las peculiaridades de cada explotación, sustentado además por una estrategia de muestreo que permita minimizar tiempo y recursos económicos. Los resultados servirán para definir un tamaño óptimo de muestra a partir del cual se pueda obtener estimaciones de curvas de lactancia similares a las que se obtienen con los datos de población, de esta forma se podrá tener una referencia de la frecuencia de tiempo para implementar registros de producción en explotaciones que no cuentan con tales registros.

II. Impactos esperados

i. Impactos en Ciencia y Tecnología

La información generada acerca del estudio de los modelos matemáticos para estimar curvas de lactancia en vacunos Browns Swiss del Centro Experimental Chuquibambilla, Puno, permitirán definir un tamaño óptimo de muestra a partir del cual se pueda obtener estimaciones de curvas de lactancia similares a las que se obtienen con los datos de población, de esta forma se podrá tener una referencia de la frecuencia de tiempo para implementar registros de producción en explotaciones que no cuentan con tales registros.

ii. Impactos económicos

Considerando que en la región de Puno no se han investigado temas importantes como la caracterización de los sistemas de producción de leche en términos de curvas de lactancia. Así mismo, no existen investigaciones respecto a estrategias de muestreo de la producción de leche para minimizar el número de observaciones que se deben recolectar para minimizar recursos humanos y económicos en el proceso de investigación, es fácil entender el impacto económico negativo para el criador, en poblaciones bovinas donde no se cuente con esta información.

iii. Impactos sociales

La crianza de bovinos de doble propósito ha elevado el número de familias involucradas en la cadena productiva bovina y la participación de la mujer en el manejo de los bovinos, generación de empleo, alivio de la pobreza, nutrición humana y seguridad alimentaria.

iv. Impactos ambientales

La población de ganado bovino de doble propósito se concentra en la Sierra peruana, los cuales se crían alimentándose con pastos naturales que crecen en 14 millones de hectáreas no aptos para la agricultura, de este modo se posibilita el uso racional, y ecológico de los recursos naturales del ecosistema alto andino.

III. Recursos necesarios

- Cuadernos de parición
- Cuadernos de empadre
- Hojas cuadriculadas
- Cuaderno
- Regla pequeña
- Regla mediana
- Marcadores indelebles
- Hoja bond A4 de 80 gr
- Lapiceros
- Lápiz
- Calculadora
- Tablero para registrar
- Cámara fotográfica

- Laptop
- Linterna de campo
- Perforador
- Engrapador
- Memoria USB
- Programa SAS

IV. Localización del proyecto

El presente trabajo de investigación se ejecutará con información existente de la población de ovinos de la raza Criolla del Centro Experimental Chuquibambilla, perteneciente a la Universidad Nacional del Altiplano, ubicado en el distrito de Umachiri, provincia de Melgar, región Puno, el mismo que cuenta con una extensión de 3,216 Has y está localizado a una distancia de 156 Km. de la Ciudad de Puno por la carretera Puno

Cusco, sobre las coordenadas geográficas : Latitud Sur 14° 47' 37", longitud oeste 70° 47' 50", a una altitud de 3974 m.s.n.m, la zona tiene una precipitación pluvial promedio de 254.9 mm (enero a mayo 2016) y de 129.9 mm (junio a diciembre 2016) y anual de 659 mm; una temperatura máxima de 20.4 C° en el mes de diciembre y una temperatura mínima -18.4 C° en el mes de junio, y un promedio de 8 C° anual; una humedad relativa promedio anual de 53% (máxima 81%, mínima 18%); 12.79 horas de radiación solar anual en promedio y evaporación promedio de 41% (SENAMHI, 2016).

V. Cronograma de actividades

Actividad	Trimestres											
	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Formulación del proyecto de investigación	X											
Preparación del material		X	X	X	X	X	X					
Procesamiento y análisis de datos								X	X	X		
Redacción y presentación del informe final											X	X

XVI. Presupuesto

Descripción	Unidad de medida	Costo Unitario (S/.)	Cantidad	Costo total (S/.)
Hojas cuadriculadas	Unidad	1.00	100	100.00
Tablero para registrar	Unidad	5.00	2	10.00
Cámara fotográfica	Unidad	1000.00	1	1000.00
Laptop	Unidad	3000.00	1	3000.00
Marcadores indelebles	Unidad	3.00	10	30.00
Calculadora	Unidad	100.00	1	100.00
Memoria USB	Unidad	100.00	1	100.00
Programa SAS	Unidad	0.0	1	0.0
TOTAL				4340.00