



Título del proyecto

Proceso de transición de la generalización empírica a la generalización teórica del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo DiedricSoft

2. Área de Investigación

Área de investigación	Línea de Investigación
Didáctica de la matemática	Educación y dinámica educativa

3. Duración del proyecto (Doce meses)

01 de enero del 2022 al 31 de diciembre del 2022

4. Datos de los integrantes del proyecto

Apellidos y Nombres	Quispe Yapó, Wenceslao
Escuela Profesional	Educación Secundaria
Celular	924 509539
Correo Electrónico	wquispey@unap.edu.pe

Apellidos y Nombres	Quispe Yapó, Edgardo
Escuela Profesional	Ingeniería Estadística e Informática
Celular	999 229075
Correo Electrónico	equispey@unap.edu.pe

I. Resumen del Proyecto

Este proyecto de investigación pretende aportar evidencias empíricas y teóricas que resuelvan el problema ¿Cómo es el proceso de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre 2022 I y II? para su abordaje se utiliza una perspectivas teóricas sobre la formación de conceptos abstractos y la generalización. El

razonamiento de los estudiantes sobre los objetos abstractos se describirá basándose en la proposición de que la abstracción es un proceso de transición de lo abstracto a lo concreto. El marco describe el proceso de abstracción a través de sus elementos: articulación de la generalización teórica en entidad abstracta y articulación, siempre partiendo de sus estadios previos con la generalización empírica o concreta, es decir, a partir de las interpretaciones y manipulaciones de los estudiantes con conceptos elementales de álgebra abstracta, incluidos los conceptos de multiplicación de permutaciones, definición de grupos diédricos, resolución de ecuaciones, problemas en la esfera de los grupos diédricos D_n , sus subgrupos cíclicos y sus representaciones. La metodología de investigación se enmarca en el paradigma emergente de la investigación basada en la experimentación de diseño de cuatro fases: Estudio Preliminar, preparación para el experimento, experimentación para apoyar el aprendizaje y análisis retrospectivo. La muestra de estudio será 50 estudiantes matriculados en el curso de Álgebra Moderna del IV semestre 2022 I (25 estudiantes) y 2022 II (25 estudiantes). Se estima que el resultado más relevante que se alcanzará es que los estudiantes logran transitar de la generalización empírica a la generalización teórica o científica, pasando por la generalización pseudoempírica gracias a la propuesta didáctica innovada basada en el uso del aplicativo DiedricSoft.

II. Palabras claves

Generalización, grupos diédricos, didáctica del álgebra.

III. Justificación del proyecto

Se asume que el pensamiento abstracto es un proceso cognitivo de alta complejidad y consecuentemente el mayor logro del intelecto humano, se considera la abstracción junto con la generalización procesos mentales de extrema importancia utilitaria para la actividad matemática y específicamente para el estudio del Álgebra Abstracta. Si bien en el estudio del álgebra abstracta se involucran procesos de relativa simplicidad como la identificación, inducción, conjeturación, es imperativo el desarrollo del pensamiento abstracto para comprender nociones matemáticas como las estructuras algebraicas. Se ha observado en el desarrollo del curso de Álgebra Abstracta un elevado porcentaje 75% de desempeño deficiente en la resolución de problemas y demostración de teoremas, existe dificultades para procesar abstracciones y generalización de nociones algebraicas que deben ser transferidas a nuevas situaciones problemáticas. Al comprender la

formación de un concepto abstracto, podremos ayudar a los estudiantes a superar esta dificultad.

La investigación proyectada es oportuna porque se ha identificado dificultades de aprendizaje comprensivo de las definiciones, propiedades y teoremas de los grupos diédricos en los estudiantes del IV semestre de la especialidad de matemática de la Facultad de Educación. La comprensión de las nociones de multiplicación de permutaciones, definición de grupos diédrico, representación cíclica de permutaciones y demás propiedades y teoremas es esencialmente empírica, es decir fundamentadas en referencias concretas y casos concretos y particulares y de tiene dificultad para saltar a una comprensión basada en la abstracción y generalización teórica alejada de sus raíces concretas. Con el estudio se pretende aportar una ruta didáctica innovada para una adecuada enseñanza de los grupos diédricos, de tal forma que comprenda las nociones algebraicas y se pueda transferir a la solución de problemas y demostración de teoremas. La finalidad del estudio es diseñar recursos didácticos como el aplicativo DiedricSoft que permitan utilizar la generalización para desarrollar la comprensión de los grupos diédricos, así mismo, proponer actividades didácticas experimentadas que permitan al docente orientar su desempeño en la conducción de las sesiones de enseñanza y aprendizaje.

Problema general

El problema general de la investigación es:

¿Cómo es el proceso de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre 2022 I y II?

Problemas específicos

Las cuestiones específicas son:

- a) ¿Cómo es el proceso de generalización empírica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes cuando resuelven problemas concretos y particulares “*próximos*”?

- b) ¿Cuáles son los rasgos del proceso más importantes de la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft cuando los estudiantes resuelven problemas de casos particulares “*distantes*” y *n-ésimos*?
- c) ¿Cómo los procesos identificados determinan una ruta de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes cuando resuelven problemas de permutaciones?

IV. Base Teórica y Antecedentes de Investigación

Dubinsky (1991) en sus estudios de pensamiento avanzado propone que el concepto de abstracción reflexiva puede ser una herramienta poderosa en el proceso de investigación del pensamiento matemático y el pensamiento avanzado en particular. Dubinsky (1980) y Clark y et al. (1997) desarrollaron una teoría que analiza los procesos de abstracción y generalización cuando aprender un concepto matemático. Así mismo, Dubinsky y sus colegas propusieron la teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) que posibilitará el estudio de la matemática en la educación de pregrado, se ha identificado estudios sobre temas de cálculo y álgebra abstracta (Zazkis y Dubinsky, 1996; Dubinsky y col., 1994; Brown y col., 1997; etc.) utilizando este marco.

Por otro lado, Davydov (1972, 1990) desarrolló una perspectiva teórica muy relevante para la investigación y la práctica educativas en general, y específicamente sobre el fenómeno de la generalización como también la abstracción. Esta teoría aparentemente es incompatible con la teoría aristotélica clásica, en la que la abstracción se considera un cambio mental de los objetos concretos a su representación mental: los objetos abstractos. En contraposición, Davydov, así como para Ohlsson, Lehtinen (1997), Mitchelmore y White (1994, 1999), Harel y Tall (1991, 1995), sostienen que la abstracción es un proceso de tránsito de lo abstracto a lo concreto. Davydov (1990) reseña una ruta histórica de la evolución de la teoría de la generalización y abstracción, desarrolla una crítica a la visión empírica sobre la instrucción al afirmar que el carácter empírico de la generalización puede causar dificultades en la comprensión matemática de los estudiantes.

Piaget (1970) considera que el proceso de abstracción es una derivación de estructuras de orden superior de las estructuras de orden inferior previamente adquiridas y se distinguen dos tipos de abstracción: primero, la abstracción simple o empírica, desde instancias concretas hasta ideas abstractas y segundo la abstracción menos concreta más distante a las experiencias empíricas.

Davydov (1990) caracteriza la generalización empírica, más concreta, en los términos siguientes:

“... [La generalización empírica elemental] se logra como resultado de la comparación al señalar las propiedades generales (similares) en las que coinciden los fenómenos que se comparan. ... Este tipo de generalización es simplemente una selección de una serie de propiedades que se dan de forma empírica, directa y sincera; por lo tanto, no es capaz de conducir al descubrimiento de nada por encima de lo que se da directamente, por los sentidos "(Cita tomada de Davydov, 1990, p. 192)

Así mismo, Davydov (1990), en concordancia con Piaget, sostiene que existe un segundo tipo de generalización denominado "generalización científica o teórica" que se enfoca la actividad mental en el análisis y la abstracción. El propósito del análisis es distinguir lo que es esencial de lo que no es esencial. Lo esencial de un objeto es una característica que permanece sin cambios en el objeto cuando se transforma durante sus interacciones con otros objetos. Cuando se delinea lo esencial, se abstrae de inmediato. Entonces el resumen puede sintetizarse en una conclusión concreta, mediante una restauración mental e interpretación de los fenómenos observados. Esta generalización se describe como:

No es simplemente una selección sino también una transformación ... La transformación de lo que se da inmediatamente, que conduce a un concepto abstracto de un fenómeno, consiste en romper el contacto ... de las circunstancias concomitantes, que complican o enmascaran la esencia de los fenómenos. (Rubinshtein, citado por Davydov, 1990, p. 193)

La generalización teórica, basada en la teoría de Davydov, es el análisis teórico de objetos (concretos o previamente abstraídos) y la construcción de un sistema que resume el conocimiento previo en el nuevo concepto (objeto matemático), por lo que está listo para ser aplicado a objetos particulares. Esta abstracción aparece de lo abstracto a lo concreto y su función es el reconocimiento del objeto. En este estudio la generalización teórica se acepta como esencial en el proceso de

aprendizaje de nociones matemáticas avanzadas. La generalización teórica entendida como el proceso de identificar similitudes estructurales profundas, que, a su vez, identifican las conexiones internas con ideas aprendidas previamente. El proceso de abstracción teórica nos lleva a la creación de un nuevo objeto mental, mientras que el proceso de generalización teórica amplía el significado de este nuevo objeto, en resumen, la génesis de una nueva idea abstracta se parece a lo siguiente:

- Abstracciones iniciales;
- agrupar abstracciones adquiridas previamente en un nivel muy elemental;
- generalización para identificar conexiones internas con ideas aprendidas previamente;
- el cambio de una idea abstracta a un ejemplo particular para articular un nuevo concepto.

Nótese que, en algún nivel del desarrollo cognitivo, las abstracciones iniciales se vuelven obsoletas porque ya se han adquirido suficientes ideas más complejas e independientes del concreto. El resultado de esta génesis es una nueva estructura más compleja y abstracta en comparación con las ideas ensambladas. De ahí que tengamos una construcción jerárquica del conocimiento, donde la siguiente idea es más avanzada que la anterior. Además, la función cognitiva de la abstracción (de ahora en adelante, abstracción y generalización son abstracción y generalización teóricas, como se definió anteriormente) es permitir el ensamblaje de ideas que existían previamente en una estructura más compleja. La función principal de la abstracción es el reconocimiento del objeto como perteneciente a una determinada clase; mientras que la construcción de una determinada clase es la función principal de la generalización, que consiste en hacer conexiones entre objetos.

V. Hipótesis

Hipótesis general

El proceso de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre 2022 I y II, se caracteriza por ser

esencialmente pseudo-empírica, fundamentado en las estrategias aritméticas recursivas.

Hipótesis específicas

Las hipótesis específicas son:

- a) El proceso de generalización empírica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes cuando resuelven problemas concretos y particulares “*próximos*”, se caracteriza por ser aritméticas y recursivas, de manipulación de representaciones gráficas visuales y hasta a veces concretas.
- b) La actividad mental centrada en el análisis y la abstracción desvinculadas de las circunstancias concomitantes, que complican o encubren la esencia de las nociones algébricas complejas son los rasgos más importantes del proceso de la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft cuando los estudiantes resuelven problemas de casos particulares “*distantes*” y *n-ésimos*.
- c) Los procesos de análisis y la abstracción desvinculadas de sus referentes concretos y particulares determinan directa y positivamente la ruta de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes cuando resuelven problemas de permutaciones.

VI. Objetivo general

Caracterizar el proceso de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes de educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNA Puno que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre 2022 I y II.

VII. Objetivos específicos

- I. Describir el proceso de generalización empírica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes cuando resuelven problemas concretos y

particulares “*próximos*”.

- II. Identificar los rasgos del proceso de generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en estudiantes cuando resuelven problemas de casos particulares “*distantes*” y *n-ésimos*.
- III. Analizar los procesos específicos de transición de la generalización empírica a la generalización teórica de las propiedades algebraicas del grupo diédrico D_n utilizando el aplicativo informático DiedricSoft en los estudiantes cuando resuelven problemas de permutaciones.

VIII. Metodología de investigación

La investigación basada en el diseño combinará la investigación educativa empírica con el diseño teórico de los entornos de aprendizaje, esta metodología permitirá entender cómo, cuándo y por qué la innovación de la enseñanza de los grupos diédricos con ayuda del aplicativo DiedriSoft funcionan en la práctica. Esta innovación didáctica basadas en el diseño incorporará afirmaciones teóricas específicas sobre la enseñanza y el aprendizaje y ayudará a comprender las relaciones entre la teoría educativa, el diseñado y la práctica. El diseño innovado permitirá fomentar el aprendizaje, crear conocimiento utilizable y desarrolla una teoría del aprendizaje y enseñanza en entornos complejos de los grupos diédricos.

Esta metodología tiene la finalidad de vincular la investigación educativa con los problemas y cuestiones de la práctica cotidiana, es decir permitirá desarrollar "conocimiento utilizable" (Lagemann, 2002). La investigación basada en la experimentación del diseño (Brown, 1992, Collins, 1992) es un paradigma emergente para el estudio del aprendizaje en contexto, mediante el diseño sistemático y el estudio de estrategias y herramientas de enseñanza aprendizaje. Argumento a favor que justifica esta metodología es que la investigación basada en el diseño ayudara a crear y ampliar conocimientos sobre el desarrollo, sostenimiento de entornos de aprendizaje innovadores.

La educación matemática es una “ciencia de diseño” como los señalan Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2010. Estos investigadores sostienen que la educación matemática es una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las

matemáticas. En síntesis, la metodología tiene su base en *The Design Research Methods in Education* (Kelly, Lessh & Baek, 2008), Paul Cobb y Koeno Gravemeijer (2008). Esta metodología tiene las siguientes fases:

Primera Fase: Estudio Preliminar

En esta fase se desarrollará las siguientes actividades preliminares:

- El análisis epistemológico de los grupos diédricos.
- El análisis de la enseñanza convencional previa y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización de la ingeniería didáctica.

Seguidamente se realiza un análisis a priori

Este análisis a tiene una parte descriptiva y predictiva; se pretende caracterizar y diseñar las situaciones a-didáctica que se van a proponer a los estudiantes:

- Descripción del grupo diédricos D_n en el contexto de la unidad didáctica de los grupos algebraicos, además de caracterizar las situaciones didácticas que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor.
- Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

Segunda Fase: Preparación para el experimento

Clarificación de los Objetivos de Instrucción

- Analizar los objetivos de aprendizaje institucionalizados en el currículo, sus orígenes y su relación con los estándares institucionales y los establecidos por la comunidad científica.

- Problematización de objetivo de enseñanza aprendizaje y proposición de objetivos alternativos.

Documentación de los Puntos de Inicio de la Instrucción

- Identificar los conocimientos previos, de los estudiantes sobre los cuales se deben construir la comprensión de las propiedades y teoremas de los grupos diédricos. Revisión del desarrollo de las unidades temáticas previas y de las asignaturas cursadas en los semestres pasados.
- Evaluar el razonamiento inductivo con el fin de entender porque utilizan formas particulares de generalización empírica.
- Documentar la historia de los procesos de enseñanza aprendizaje previos a la experiencia.
- Determinar qué aprenden usualmente los estudiantes en la unidad “Grupos de permutación” en el contexto del programa curricular.

Tercera Fase: Experimentación para apoyar el aprendizaje

Algunas técnicas e instrumentos de recolección de datos:

- Entrevistas previas y posteriores a los estudiantes de formación docente.
- Dossier de los trabajos escritos de los alumnos.
- Evaluación de procesos de generalización, plasmados como notas de campo.

Marcos interpretativos

En el proceso de experimentación para apoyar el aprendizaje, el equipo de investigación realizará interpretaciones continuas tanto de la actividad de los participantes como del entorno de aprendizaje en el que se encuentran. Estas interpretaciones en curso se informan sobre el diseño y las decisiones de enseñanza y aprendizaje y por lo tanto moldean el esfuerzo de diseño y rediseño profundamente. Los marcos interpretativos mientras se intenta entender eventos específicos en las aulas, estos surgen del esfuerzo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes y comprender la naturaleza de los procesos cognitivos en cuestión. Las interpretaciones de los eventos de clase se retroalimentan y documentan el esfuerzo del proceso de enseñanza aprendizaje.

Ciclos de Diseño y Análisis

Dos tratamientos complementarios de la explicación causal: Primero, la causalidad se basa en las regularidades observadas en un número de casos y una explicación de los procesos; segundo, las explicaciones viables de este tipo pueden discernirse sobre la base de un solo caso, sobre todo si el equipo de investigación utiliza un marco interpretativo bien establecido que ha sido perfeccionado durante una serie de experimentos previos (Maxwell, 2004: 4).

Se abstraerá una **teoría de instrucción específica del dominio** concretizados en conceptos, propiedades, principios, normas abstraídas sobre un proceso de aprendizaje puntual y fundamentado que culmina con el logro de metas de aprendizaje, así como los medios utilizados para apoyar ese proceso de aprendizaje.

Cuarta Fase: Análisis retrospectivo

El objetivo del análisis retrospectivo dependerá de la intención teórica del experimento de diseño. Los temas que se consideran en esta fase son: La gramática argumentativa de los análisis, la confiabilidad, la replicabilidad y la generalización de los resultados. Estos análisis retrospectivos buscarán ubicar los aprendizajes y los medios de apoyo en un contexto teórico más amplio, enmarcando el mismo como un caso paradigmático de un fenómeno más abarcador.

Instrumentos de recogida de datos elaborados y material experimental

- a) Cuestionario para la evaluación de la comprensión de la generalización de los grupos diédricos.
- b) Diseño y programación del aplicativo DiedricSoft que posibilitará la transición de la generalización empírica a la generalización teórica.
- c) Diseño de la Unidad Didáctica Innovada.

Técnicas de análisis de datos

Se usarán diversas técnicas tanto cualitativas como cuantitativas, dependiendo de las fases e instrumentos de la investigación.

Para los datos obtenidos de los cuestionarios, se aplicarán técnicas estadísticas estándares, en particular, resúmenes descriptivos y tendencias a través de la observación transversal.

Plan de Trabajo y Tareas previstas

T1: Revisión de la bibliografía específica sobre: Procesos, niveles y actividades de la generalización matemática.

T2: Construcción de un banco de situaciones sobre los grupos diédricos.

T3: Diseño de actividades para la comprensión de los procesos de generalización de los grupos diédricos.

T4: Aplicación piloto de los cuestionarios; análisis de resultados y revisión del cuestionario.

T5: Recolección de datos para su análisis e interpretación.

Población y Muestra de Estudio

La población de interés está constituida por los estudiantes que cursan el componente curricular Álgebra Moderna del IV semestre durante dos semestres académicos 2022 I y 2022 II de la especialidad de Matemática, Física, Informática y Computación de la Facultad de Ciencias de la Educación.

La muestra intencional está constituida por un grupo de 30 estudiantes, su selección es intencional por el criterio de accesibilidad.

IX. Referencias

American Educational Research Association, American Psychological Association & National Council On Measurement In Education-1999. (2008). Standards for Educational and Psychological Testing. Washington: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 49(5), 389-407.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: The foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM The international Journal on Mathematics Education*, 40(1): 1.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

- Consejo Nacional de Educación (CNE). (2007). Estándares de aprendizaje Definición, tensiones y propuesta para el Perú. CNE.
- Cooper, T. J. y Warren, E. (2008) Generalising mathematical structure in Years 3-4: A case study of equivalence of expression. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A., (Eds.) Proceedings of the 32th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), (pp. 369-376).
- Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), Early algebraization. Advances in mathematics education. (pp. 187-211). Springer-Verlag.
- Correa Muñoz, H. E. (2017). Estrategias y formas de razonamiento en estudiantes de undécimo grado en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales. Tesis de maestría. Universidad de Medellín
- Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula (Soviet Studies in Mathematics Education, Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Davydov, V. V. (2008). Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study. Nova Science, NY.
- DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. Educational Researcher, 32(1), 5-8.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (Ed.), Mathematical Knowledge: It's Growth Through Teaching (pp. 63-85). Kluwer A.P.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Vol. 1): 258-264. University of Melbourne.

- García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. Olivier, A., Newstead, K. (Eds). Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics (PME), Vol. 2 (pp 329- 336). University of Stellenboch.
- Hernández S., R.; Fernández C., C.; Baptista L., P. (1991) Metodología de la Investigación. Edit. Mc. Graw Hill.
- Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren, (translated from the Russian by J. Teller). University of Chicago Press.
- Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342-349.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic activities culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (Vol. 18): 87-106. Kluwer academic publishers.
- Leontiev, A. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*, 65-86. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Moss, J., y London, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. En, J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education*, (pp. 277-298). Berlin: Springer-Verlag.
- National Council Of Teachers Of Matematics, (NCTM) U.S.A. (2004). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales-NCTM.
- National Council Of Teachers Of Matematics, NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pérez Peña, J. J. (2005). *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental*. Tesis de maestría presentado en la Universidad de Antioquia.

- Piaget, J. (1964). Development and learning. In: R.E. Ripple and V.N. Rockcastle, Editors. Piaget rediscovered. Cornell University Press, Ithaca, 7–19. <https://doi.org/10.1002/tea.3660020305>
- Presmeg, N. C. (1999). On visualization and generalization in mathematics. Hitt, F. y Santos, M. (Eds.), Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 1 (pp 23-27). Cuernavaca: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In J. L. Alatorre, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter (Vol. 1): 2-21. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, Méjico.
- Rubinshtein, S. L. (1994). Thinking and ways of investigating it. *Journal Of Russian and East European Psychology*, 32 (5), 63-93. <https://doi.org/10.2753/rpo1061-0405320563>
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Valencia, J. y Gutiérrez V. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, vol. 30, núm. 2. pp. 49-72.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological Processes*. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press. <https://doi.org/10.2307/1421493>
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. A. Kozulin (Ed). Cambridge, MA: MIT Press. <https://doi.org/10.1017/S0272263100008172>
- Vygotsky"s educational theory in cultural context. NY: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511840975.013>

Yeap, B.-H., & Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalization: A glimpse from a Singapore classroom. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic*, 40(1): 55-64.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

X. Uso de los resultados y contribuciones del proyecto

Los resultados de la investigación serán publicados para que los profesores de matemática de la región para que los puedan incorporar en su labor de enseñanza.

XI. Impactos esperados

Impacto en Ciencia y Tecnología

Desarrollo de material didáctico y un aplicativo llamado DiedriSoft para la formación profesional de estudiantes de álgebra moderna, que quedará traducido en un manual universitario "Grupos de Permutaciones".

XII. Cronograma de actividades

La realización de la investigación se organiza en cuatro fases que pasamos a detallar en el cronograma:

Fase: Diseño: Fase de Ejecución: Enero-abril 2022

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Búsqueda de información	Investigación de artículos especializados en el tópico de investigación.	Enero 2022
	Revistas, informes, actas.	Febrero 2022
Análisis de la información	Evaluación del estado actual de la teoría sobre análisis de libros de texto.	Marzo 2022
	Estudio y evaluación de otras investigaciones y su metodología usada.	Abril 2022

Fase: Fase de Análisis y valoración: Mayo - setiembre 2022

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Desarrollo teórico	Construcción del marco teórico	Mayo 2022
	Formulación de los instrumentos de evaluación	Junio 2022
Obtención de datos experimentales	Evaluación de competencias de los estudiantes	Julio 2022
	Categorización de las observaciones	Agosto 2022
	Formulación de resultados preliminares	Setiembre 2022

Fase: Discusión de resultados: Octubre–noviembre 2022

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Obtención de conclusiones	Sistematización de los datos recogidos y su evaluación y discusión de resultados.	Octubre 2022
	Análisis y discusión de los resultados de la investigación y elaboración de conclusiones	Noviembre 2022

Fase: Redacción y Edición: diciembre 2022

OBJETIVOS	ACTIVIDAD	PLAZO
Redacción del documento definitivo	Primera redacción del informe preliminar	Diciembre 2022
	Redacción del informe	Diciembre 2022

XVI. Financiamiento

El proyecto de investigación será autofinanciado mientras no se consiga otra fuente de financiamiento. El presupuesto total es de 6000 soles.